BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Versuch E3

Bewegung von Elektronen im elektrischen und magnetischen Feld

2.94/10.04

I. Zielsetzung des Versuchs

Mit Hilfe einer Oszillographenröhre untersuchen Sie die Bewegung von Elektronen unter dem Einfluß äußerer Felder. Dazu beschäftigen Sie sich zunächst mit dem Grundprinzip eines Oszillographen, der Ablenkung von Elektronenstrahlen durch elektrische Felder. Ebenso können Elektronenstrahlen durch magnetische Felder abgelenkt werden, hierzu verwenden Sie das Magnetfeld eines Helmholtz-Spulenpaares. Zum Schluß versuchen Sie, mit diesem Effekt Richtung und Größe des Erdmagnetfeldes zu bestimmen.

II. Vorkenntnisse

a) allgemeine Vorkenntnisse

Lorentzkraft, Bewegungsgleichung von Elektronen im homogenen elektrischen und magnetischen Feld, Magnetfeld einer Zylinderspule

Literatur:
Jedes Lehrbuch der Physik

b) spezielle Vorkenntnisse

Funktionsweise einer Oszillographenröhre (= Braunsche Röhre = Kathodenstrahlröhre)

Literatur:
Gerthsen Kneser Vogel,
Alonso Finn Band II, Kap. 14.4

III. Theorie zum Versuch

In einem konstanten elektromagnetischen Feld wird die auf ein Elektron wirkende Kraft durch die allgemeine Lorentzkraft beschrieben:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = -e\vec{E} - e(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

e:	Elementarladung	$\vec{E}$:	elektrisches Feld
$\vec{v}$:	Geschwindigkeit der Elektronen	$\vec{B}$:	magnetisches Felld

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt die vom elektrischen Feld bewirkte Kraft dar, das zweite die vom Magnetfeld. Diese Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit des Elektrons und zur magnetischen Induktion in einem vorgegebenen Punkt.

Zur Bestimmung der Energieabhängigkeit des Elektrons im elektromagnetischen Feld multiplizieren wir Gl. (1) skalar mit $\vec{v}$:

$$\vec{v}\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = -e(\vec{E}\vec{v}) - e(\vec{v}(\vec{v} \times \vec{B})) \tag{2}$$

Da der zweite Term Null ist, folgt daraus:

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) = -e(\vec{E}\vec{v}) \tag{3}$$

Das heißt die kinetische Energie des Elektrons kann nur durch ein elektrisches Feld geändert werden. Die Kraft, die das Magnetfeld ausübt, steht immer senkrecht zu $\vec{v}$ (Kreuzprodukt!) und kann deshalb keine Arbeit leisten, d.h. das Magnetfeld ändert die kinetische Energie nicht, wohl aber die Bewegungsrichtung des Elektrons.

Die Energieerhaltung ergibt sich mathematisch direkt aus Gleichung (3) durch Integration

$$\frac{1}{2}mv^2 = +eU + \text{const.} \qquad U = \text{Spannung}$$

$$E_k + E_p = \text{const.} \tag{4}$$

Anmerkung: mit $E = -\text{grad}\, U = -(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$ folgt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2) &= -e(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \\ &= +e(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}) = e\frac{dU}{dt}\end{aligned}$$

Die Integrationskonstante in Gl. (4) ist aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Für einen Bewegungsablauf folgt für zwei Zeitpunkte folgende Energiebilanz:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - eU_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - eU_1 \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = e(U_2 - U_1)$$

D.h. wird das Elektron von einem Punkt mit dem Potential U_1 in einen Punkt mit dem Potential U_2 überführt, und ist $U_2 - U_1 = U$, dann gilt:

$$\frac{mv^2}{2} = eU \qquad \text{wobei} \qquad \vec{v_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{v_2} = \vec{v} \qquad \text{ist.}$$

Die Energie einzelner Teilchen wird meist in Elektronenvolt (eV) angegeben. 1 eV ist die Energie, die ein mit der Elementarladung $1,610^{-19}$ C (Coulomb) behaftetes Teilchen gewinnt bzw. verliert auf dem Weg zwischen zwei Orten eines elektrischen Feldes, zwischen denen die Potentialdifferenz 1 Volt besteht.

$$1\,\text{eV} = 1,602 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 1\,\text{V} = 1,602 \times 10^{-19}\,\text{Ws}$$

Wir berechnen jetzt die **Ablenkung eines Elektrons im transversalen homogenen elektrostatischen Feld**

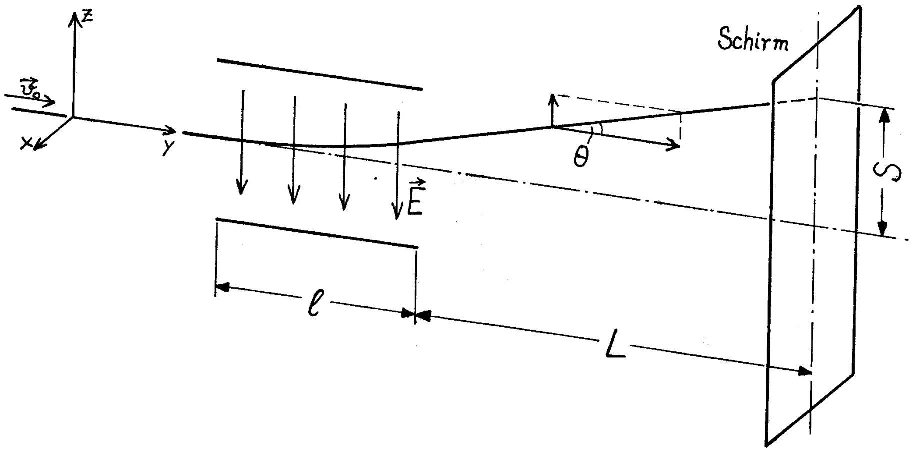


Fig. 1

Mit $\vec{B} = 0$ und bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems (Fig. 1) gilt: $E_x = E_y = 0$. Das Feld hat in Fig. 1 die Richtung der negativen z-Achse. Wenn das Elektron die Beschleunigungsspannung U_B durchlaufen hat, besitzt es eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v_0}$. Im Augenblick des Eintritts in den Ablenkkondensator liegt der Vektor $\vec{v_0}$ in der y-z-Ebene. Die Gleichung für die Elektronenbewegung kann jetzt in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= eE_z \\ m\ddot{y} &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems für $t = 0$ im Koordinatenursprung erhält man durch zweifache Integration:

$$\begin{aligned} y &= c_{y1}t + c_{y2} \\ z &= \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_z t^2 + c_{z1}t + c_{z2} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten erhält man aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{lcl} y(0) = 0 & \Rightarrow & c_{y2} = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \cos\phi_0 & \Rightarrow & c_{y1} = v_0 \cos\phi_0 \\ z(0) = 0 & \Rightarrow & c_{z2} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \sin\phi_0 & \Rightarrow & c_{z1} = v_0 \sin\phi_0 \end{array}$$

Damit haben die Lösungen folgende Form:

$$\begin{aligned} y &= v_0 t \cos\phi_0 \\ z &= \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_z t^2 + v_0 t \sin\phi_0 \end{aligned}$$

Als weitere Spezialisierung kann man annehmen, daß $\vec{v_0}$ senkrecht zu $\vec{E}$ steht,
d.h. $\vec{v_0} = |v_0|\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ und $\phi_0 = 0$, wobei $\frac{\vec{y}}{|\vec{y}|}$ = Einheitsvektor in y-Richtung.

$$y = v_0 t \qquad z = \frac{1}{2}\frac{e}{m}E_z t^2$$

Durch Elimination der Zeit t erhalten wir eine Parabelbahn

$$z = \frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{E_z}{v_0^2}y^2$$

Nach den Ablenkplatten sind die Elektronen bezüglich der z-Achse um den Winkel Θ verschoben, den man berechnen kann, wenn die Steigung bekannt ist (siehe Figur 1):

$$\begin{aligned} \tan\Theta &= \left(\frac{dz}{dy}\right)_{y=l} \simeq \frac{S}{L} \qquad \text{für} \qquad L \gg S \\ \tan\Theta &= \frac{e}{m}\frac{E_z}{v_0^2}l \end{aligned}$$

Unser transversales elektrisches Feld zwischen den Ablenkplatten ist

$E_z = \frac{1}{d}U_0$ (d = Plattenabstand, U_0 = anliegende Spannung) und mit Hilfe des Energiesatzes

$\frac{1}{2}mv^2 = eU_B$, folgt:

$$\tan\Theta = \frac{1}{2U_B}\frac{U_0}{d}l$$

Ablenkung im transversalen Magnetfeld

Wir betrachten nun den einfachsten Fall, dessen Bedingungen den üblichen Laborexperimenten entsprechen: die Ablenkung eines parallelen Elektronen- strahlbündels im magnetischen Feld. Transversales Magnetfeld:

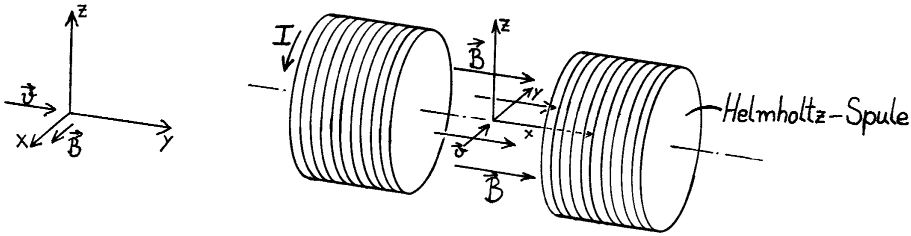


Fig. 2

Zur Zeit $t = 0$ habe die Geschwindigkeit des Teilchens die Richtung der y-Achse, d.h. bei $t = 0$ sei $v_x = v_y = 0$ und $v_y = |\vec{v}|$.

Für das magnetische Feld nehmen wir an, daß es homogen und zeitlich konstant ist und die Richtung der x-Achse hat.

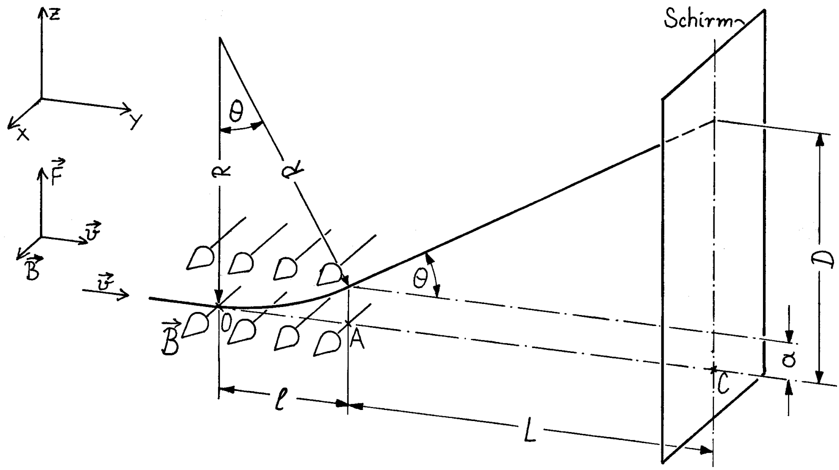


Fig. 3

Das Feld wirke in dem Abschnitt $OA = l$. Im Abstand $OC = l + L$ ist ein Fluoreszenzschirm angebracht, auf dem die Ablenkung D gemessen wird. Die Lorentzkraft ist stets senkrecht zu $\vec{v}$ gerichtet, d.h. die Richtung von $\vec{v}$ wird geändert, nicht aber der Betrag; das Elektron bewegt sich deshalb auf einer Kreisbahn, deren Radius man durch Gleichsetzen der Lorentzkraft und der Zentrifugalkraft erhält:

$$e|\vec{v}|B = \frac{1}{R}mv^2 \qquad m = \text{Masse des Elektrons} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{mv}{e}\frac{1}{B}$$

Nach Fig. 3 bewegt sich das Elektron nach Verlassen des Magnetfeldes geradlinig weiter zum Schirm, unter Beibehaltung des Ablenkwinkels Θ bezüglich der y-Achse. Es folgt daraus:

$$\sin\Theta = \frac{1}{R} = \frac{leB}{mv}$$

Der Abstand a läßt sich berechnen durch

$$a = R - R\cos\Theta = R(1-\cos\Theta) = \frac{mv}{Be}(1-\cos\Theta)$$

Die Elektronen stoßen gegen den Schirm im Abstand D vom ursprünglich unabgelenkten Strahl:

$$D = L\tan\Theta + a = L\Theta + R(\frac{1}{2}\Theta^2)$$

unter der Annahme, daß der Ablenkwinkel Θ klein ist und damit gilt:

$$\sin\Theta = \tan\Theta = \Theta,$$

$$\cos\Theta = 1 - \frac{\Theta^2}{2}$$

Mit Hilfe von

$$\Theta = \frac{1}{R} = \frac{leB}{mv}$$

und der Energiebilanz

$$\frac{m}{2}v^2 = eU_B$$

folgt für die Ablenkung D:

$$D = \frac{leB}{\sqrt{2emU_B}}(L + \frac{1}{2}l) \qquad U_B = \text{Beschleunigerspannung}$$

IV. Versuchsdurchführung

Beachten Sie vor Versuchsbeginn unbedingt die Hinweise zur Schaltung (im Anhang)!

a) Ablenkung im transversalen elektrischen Feld

$\boxed{1}$ Messen Sie mit einem Lineal an einer Musterröhre die Abstände L_{12}, l_{12} und d_{12} sowie L_{34}, l_{34} und d_34 für die beiden Ablenkplattenpaare. Als Richtwerte können Sie annehmen: $l_{12} = l_{34} = 35 \pm 2$ mm, $L_{12} = L_{34} = 65 \pm 5$ mm.

Da die Ablenkplatten teilweise gebogen sind (siehe Abbildung der Röhre im Anhang), müssen Sie für den Meßwert des Plattenabstands d_{12} und d_{34} eine vernünftige Abschätzung machen. Ein Wert zwischen 2 und 5 mm sollte sinnvoll sein.

$\boxed{2}$ Setzen Sie die Oszillographenröhre mit Hilfe des Schaltplans (folgende Seiten) in Betrieb und stellen Sie einen scharfen Leuchtfleck ein ($U_{D12} = U_{D34} = 0$, d.h. verbinden Sie die Anschlüsse D12 und D34 mit G245).

$\boxed{3}$ Messen Sie für eine feste Beschleunigungsspannung U_B die Ablenkung S_{12} als Funktion der Ablenkspannung U_{D12}.

Tragen Sie S_{12} als Funktion von U_{D12} in einem Diagramm auf.

$\boxed{4}$ Wiederholen Sie diese Messung und die graphische Darstellung mit den Ablenkplatten D34.

$\boxed{5}$ Ändern Sie die Beschleunigungsspannung U_B, optimieren Sie die Fokussierung und wiederholen Sie die Messungen $\boxed{3}$ und $\boxed{4}$ für zwei weitere Werte von U_B.

Stellen Sie auch diese vier Messungen graphisch dar.

$\boxed{6}$ Als graphische Darstellung dieser 6 Messungen aus $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ und $\boxed{5}$ erwarten Sie Ursprungsgeraden, z.B. $S_{12} = k_{12} \cdot U_{D12}$ (warum? Welche Ursache könnte es haben, wenn sich keine exakte Ursprungsgerade ergibt?)

Bestimmen Sie die drei Steigungen k_{12} und die drei Steigungen k_{34}.

Berechnen Sie für alle 6 Steigungen das Produkt $U_B \cdot k$ mit der entsprechenden Beschleunigungsspannung. Die drei Produkte $U_B \cdot k_{12}$ sollten etwa gleich sein (warum?), ebenso die drei Produkte $U_B \cdot k_{34}$.

$\boxed{7}$ Berechnen Sie den Mittelwert der drei Produkte $U_B \cdot k_{12}$. Aus diesem Mittelwert können Sie mit den gemessenen L_{12} und l_{12} den Plattenabstand d_{12} bestimmen (nach welcher Formel?).

Vergleichen Sie den so erhaltenen Wert mit dem der direkten Messung von d_{12} an der Röhre.

$\boxed{8}$ Bestimmen Sie ebenso aus dem Mittelwert der drei Produkte $U_B \cdot k_{34}$ und den gemessenen L_{34} und l_{34} den Plattenabstand d_{34}.

Vergleichen Sie auch diesen Wert mit dem der direkten Messung von d_{34}.

$\boxed{9}$ Diskutieren Sie die Fehler, mit denen Ihre Messungen behaftet sind.

b) Ablenkung im transversalen Magnetfeld

$\boxed{10}$ Die Röhre wird betrieben wie in a). Die Ablenkplatten werden nicht benutzt, werden aber an die Anode (G245) angeschlossen. So wird eine statische Aufladung der Platten verhindert, die eine ungewollte Ablenkung zur Folge haben kann. Da Sie im weiteren Verlauf des Versuchs keine Ablenkspannungen U_{12} und U_{34} mehr benötigen, **schalten Sie bitte den 90 V-Batterieblock ab!** (entfernen sie den Drahtbügel an der Seite des Steuerkastens.)

Die beiden Spulen sind in Serie geschaltet, so daß sich die beiden Magnetfelder addieren. Gemessen wird die an den Spulen angelegte Spannung U_S. Sie ist proportional zum Strom, der durch die Spulen fließt, und damit proportional zum Magnetfeld.

$\boxed{11}$ Messen Sie die Strahlablenkung S_S als Funktion der Spulenspannung U_s für feste Beschleunigungsspannung U_B und stellen Sie die Messung graphisch dar.

$\boxed{12}$ Wiederholen Sie die Messung und graphische Darstellung für zwei andere Beschleunigungsspannungen.

$\boxed{13}$ Sie erwarten Ursprungsgeraden $S_S = k_S \cdot U_s$ (wieso?). Bestimmen Sie die drei Steigungen k_s.

Berechnen Sie für jedes k_s das entsprechende Produkt $k_s \cdot \sqrt{U_B}$. Vergleichen Sie diese drei Produkte miteinander. Was erwarten Sie (warum?).

c) Erdmagnetfeld

$\boxed{14}$ In a) und b) haben Sie beobachtet, daß bei Abwesenheit von ablenkenden Feldern die Lage des Punktes sich ändert, wenn die Beschleunigungsspannung geändert wird. Ein Grund für diesen Effekt ist das Erdmagnetfeld.

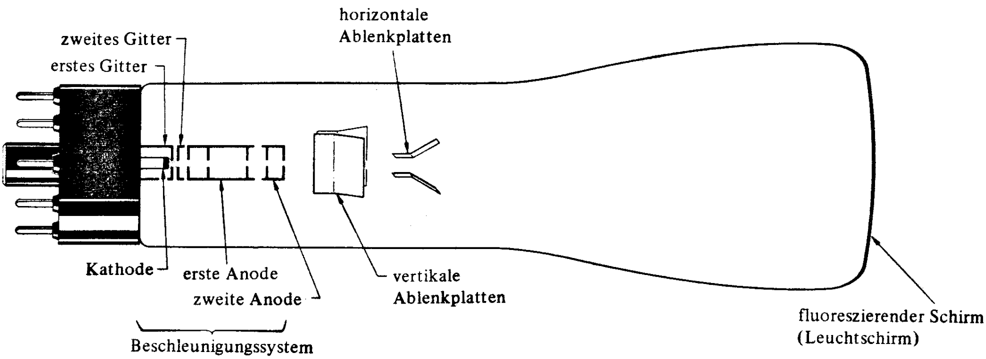
Versuchen Sie, durch Markierung mit einem Fettstift auf dem Schirm eine Orientierung der Röhre zu finden, für die keine Ablenkung auftritt. Wie ist in dieser Lage die Beziehung zwischen Achsenrichtung (Elektronenstrahl) und Richtung des Magnetfeldes der Erde?

15 Versuchen Sie jetzt, eine Orientierung zu finden, für die die Ablenkung ein Maximum hat. Bestimmen Sie die Richtung und Stärke des Magnetfeldes. Beachten Sie, daß in diesem Fall l die gesamte Länge zwischen Anode und dem Schirm ist und $L = 0$. Die Elektroden der jetzt verwendeten Röhren sind teilweise aus unmagnetischem Material. Für l sollten Sie daher die Strecke mindestens von G4 zum Schirm ansetzen (bei ferromagnetischen Ablenkplatten würde der Strahl magnetisch abgeschirmt und für l wäre der Abstand von G5 zum Schirm anzusetzen).

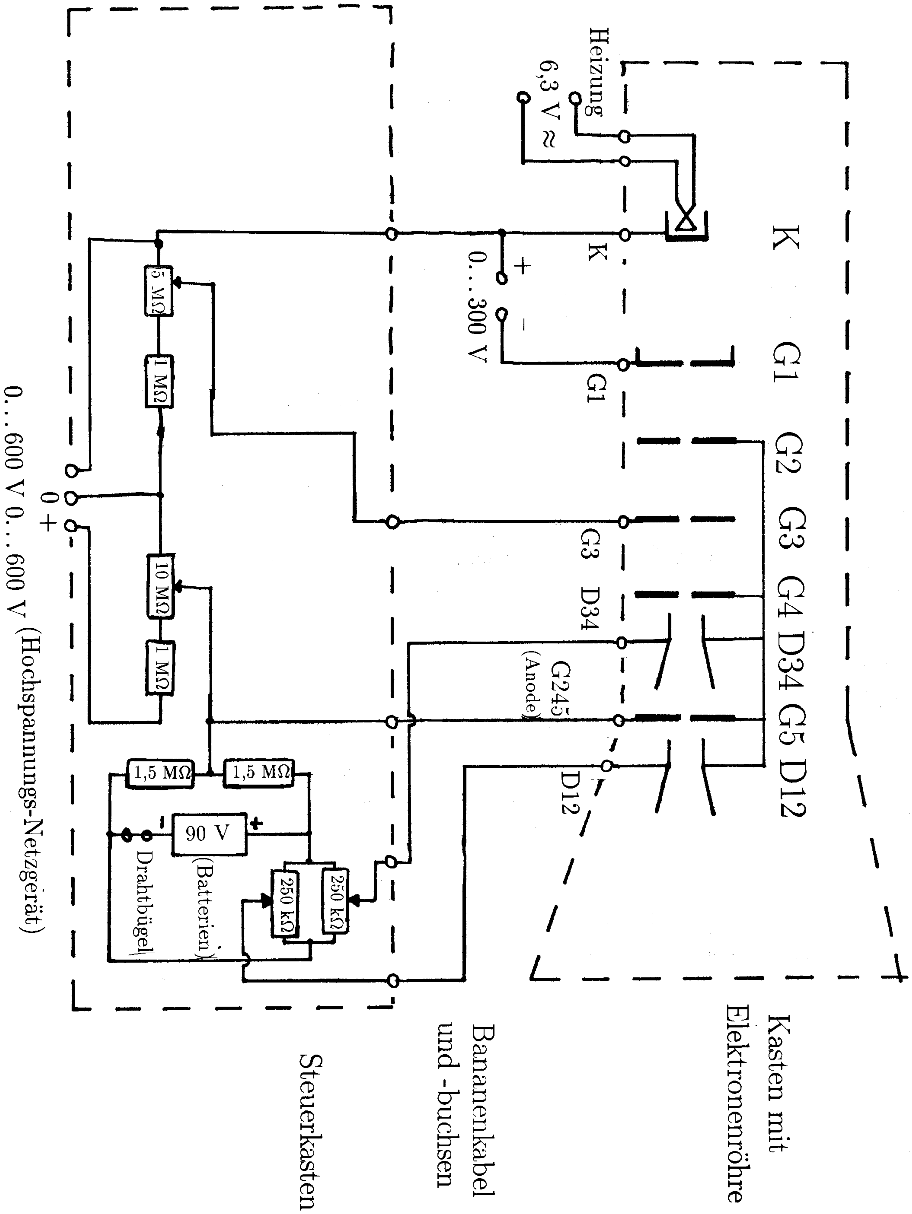
Vergleichen Sie Ihre Bestimmung von Größe und Richtung des Erdmagnetfeldes mit Literaturwerten.

Anhang A

Aufsicht einer Oszillographenröhre



Schaltplan für die Oszillographenröhre



Hinweise zur Messung und zum Schaltbild:

Zwischen K und Gl wird eine regelbare Spannungsquelle (z.B. 0 ... 25 V oder 0 ... 300 V) direkt angeschlossen. Wenn hierfür keine Spannungsquelle zur Verfügung steht, können K und Gl auch einfach miteinander verbunden werden. Die Fokussierung ist dann aber schlechter.

Das Symbol für die Gitter G1 bis G5 (dicker Strich mit Unterbrechung) soll eine Metallplatte mit Loch in der Mitte darstellen. Das bedeutet insbesondere, daß die obere „Hälfte" von G5 (sowie von G2, G4 und eine Platte von D12 und D34) mit der unteren „Hälfte" von G5 (und dem Knotenpunkt aus 10 MΩ und zweimal l,5 MΩ) verbunden ist.

Die Spannung für die Kathodenheizung ist 6,0 V bis 6,3 V (Wechselstrom).

Die Beschleunigungsspannung wird in erster Linie mit dem Potentiometer (für G245) verändert. Sie können aber auch an dem regelbaren Hochspannungsnetzgerät die Spannung etwas erhöhen oder verringern. Ein Wert von 1500 V sollte jedoch für die Beschleunigungsspannung nicht überschritten werden.

Die Hochspannung zwischen K und G245 (= Beschleunigungsspannung der Elektronen) wird über hochohmige Widerstände der Röhre zugeführt. Daher kann diese Spannung nur mit einem sehr hochohmigen Gerät gemessen werden. Auch dann vermindert aber der Anschluß des Meßgerätes die Spannung. Daher muß während des gesamten Versuchs das Spannungsmeßgerät angeschlossen bleiben, um größere Meßfehler der Beschleunigungsspannung zu vermeiden.

Zur Messung der Ablenk- oder Spulenspannung steht Ihnen ein weiteres Meßgerät zur Verfügung.

Die Hochspannung darf niemals mit Digitalmultimetern gemessen werden. Ihre Elektronik wird häufig durch geringste Überspannungen weitgehend zerstört! Außerdem ist der Innenwiderstand (10 MΩ) kleiner als bei einigen Analogmultimetern (Unavo9e: 29 MΩ bei Meßbereich DC 1500 V).

Es gibt neue Hochspannungsnetzgeräte (Leybold 522 37); diese haben einen Tastschalter, mit dem der linke oder rechte Ausgang oder beide Ausgänge eingeschaltet werden können (angezeigt durch Leuchtdioden an der Frontplatte). Die Digitalanzeige im Gerät ist natürlich nicht die Beschleunigungsspannung der Röhre.

Stellen Sie die Elektronenröhre nicht zu nahe an die Netzgeräte (Strahlstörung durch magnetische Streufelder der Trafos).

Setzen sie den Drahtbügel zum Einschalten der Ablenkspannung (90 V aus Batterien) nur während des Versuchs ein (Batterie schonen!). Sorgen Sie bitte dafür, daß der Bügel nach Versuchsende entfernt ist! (Es ist nicht möglich, die Ablenkspannung aus Netzgeräten zu beziehen. Die Anode (G245) liegt ja bzgl. der Kathode auf Hochspannung, das führt zu Isolationsproblemen bei verschiedenen Netzgeräten. Außerdem produzieren die vorhandenen Netzgeräte zu große Störungen durch kapazitiv eingekoppeltes Netzbrummen.)

Beim Strahlfokussieren und wenn nur mit horizontaler oder vertikaler Ablenkung gemessen wird, sollten die Anschlüsse D12 und/oder D34 mit der Anode (G245) verbunden werden.