

Modifikation der
Schalenstruktur
bei leichten Kernen
($A < 50$)

Schalenmodell

- Magische Zahlen
- Restwechselwirkung
- Modifikation der magischen Zahlen in exotischen neutronenreichen Kernen

N=8

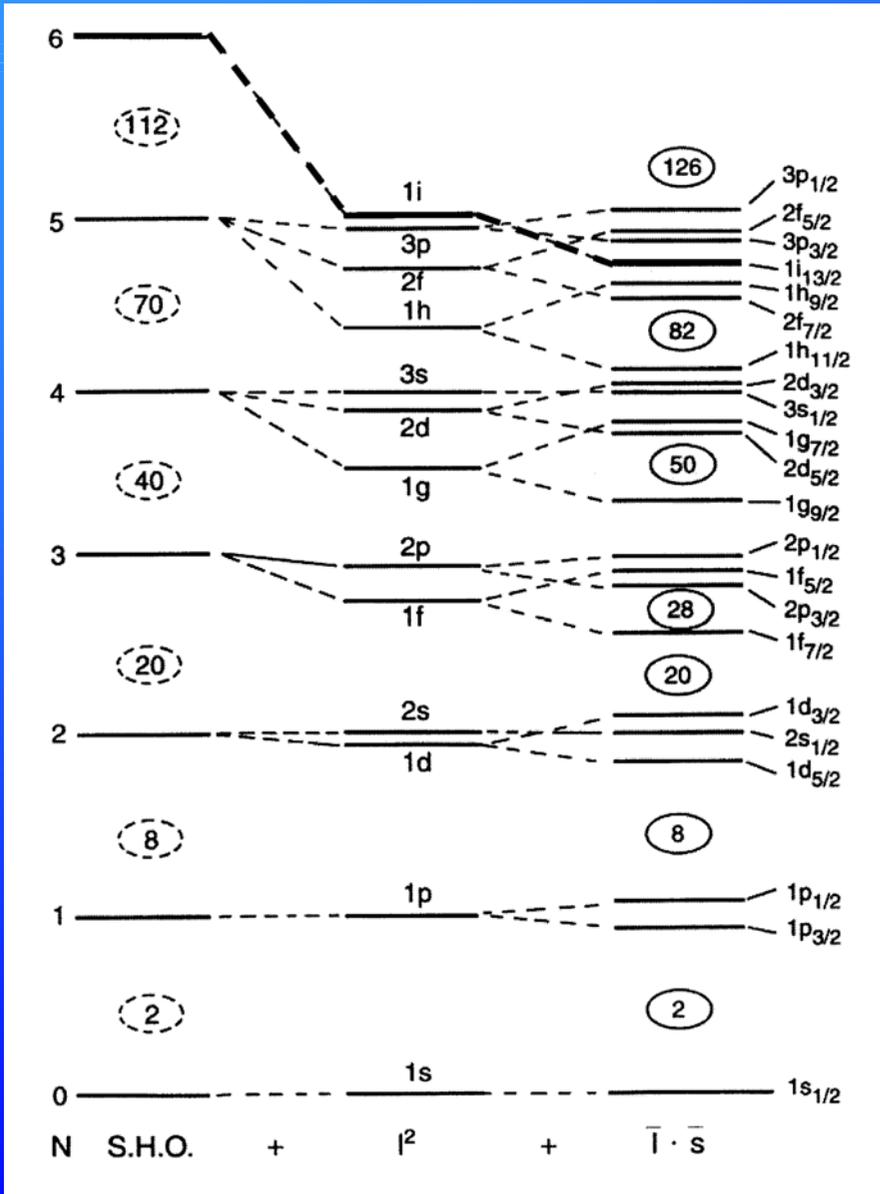
N=20

N=28

Experimentelle Methoden

- Knock-out Reaktionen
- Coulombanregung bei intermediären Energien (einige 10 MeV/u)
- γ -Spektroskopie nach Transfer
- γ -Spektroskopie nach Fragmentation

Schalenmodell



Unabhängige Teilchen in gemeinsamen Potentialtopf:

Zentralpotenzial (z.B. harmonischer Oszillator)

→ magische Zahlen nicht reproduziert!

+ $|l|^2$ -Korrektur

→ magische Zahlen wieder nicht reproduziert!

+ $\bar{l} \cdot \bar{s}$ -Term (Spin-Bahn-Kopplung)

→ magische Zahlen korrekt

Einfache Vorhersagen

Magische Zahlen

- Abgeschlossene Schalen tragen nicht zum totalen Drehimpuls bei!
- Grosse Separationsenergie $S_{n/p}$ bzw. Bindungsenergie (Stabilität)
- Sphärische Kerne
- Grosse Anregungsenergie $E(2^+)$
- Kleine $B(E2; 0^+ \rightarrow 2^+)$

Schalenmodell – Einfache Vorhersagen

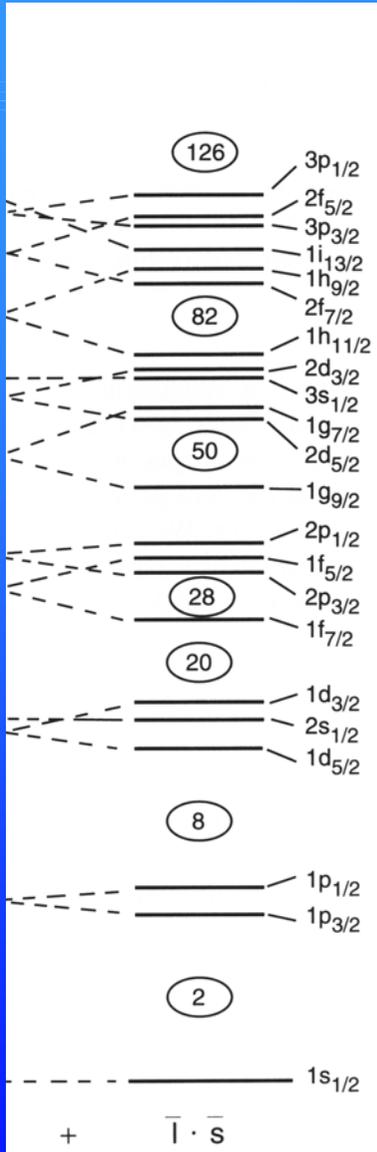
Betrachte j -Orbital:

$2j+1$ magnetische Unterzustände

Orbital voll besetzt: $J = \sum j_i$ $M = \sum m_i = 0 \rightarrow J = 0$

Jedes voll besetzte j -Orbital und damit jede volle Schale trägt nicht zum Kernspin bei!

Für Kern mit einem Nukleon außerhalb eines vollen Orbitals ist der Kernspin gleich dem Spin dieses letzten Nukleons!



Gefüllte Schale +1



$$j^\pi = \frac{7^-}{2}$$

Gefüllte Schale -1



$$j^\pi = \frac{3^+}{2}$$

Gefüllte Orbitale +1



$$j^\pi = \frac{1^+}{2}$$

Restwechselwirkung 1

Aber: für detaillierte Beschreibung muß noch **Restwechselwirkung** zwischen den Nukleonen betrachtet werden:

$$H = H_0 + H_{\text{RestWW}}$$

Wir kennen bereits Paarwechselwirkung

- Weizsäcker'scher Massenformel
- Grundzustand von gg-Kernen hat Spin $J=0$

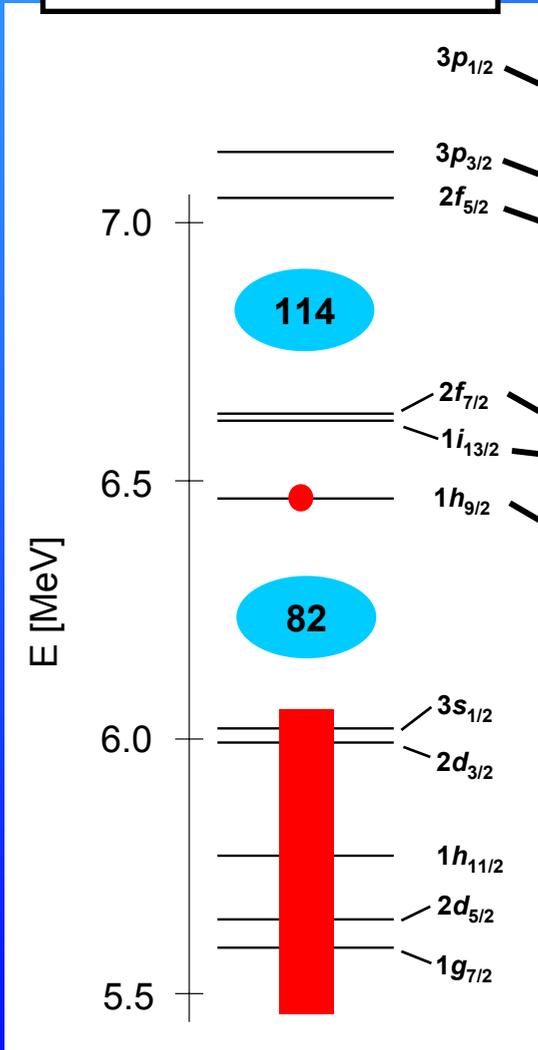
Multipolentwicklung der Restwechselwirkung:

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \sum_k v_k(r_1 r_2) P_k(\cos \theta)$$

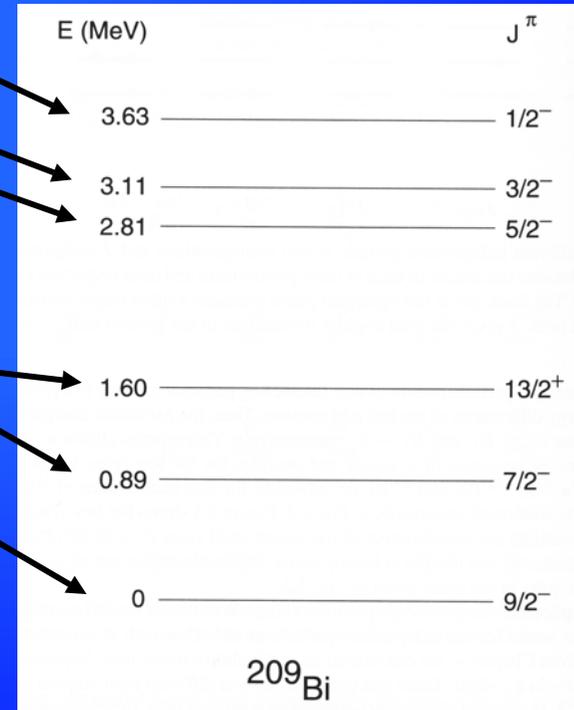
- grosse $k \Leftrightarrow$ kurzreichweitige Anteile (z.B. PaarWW)
- kleine $k \Leftrightarrow$ langreichweitige Anteile $k=0$: Monopol (Zentralpotential)
 $k=2$: Quadrupol

Restwechselwirkung 2

Einteilchenzustände
von Protonen
(ohne RestWW)



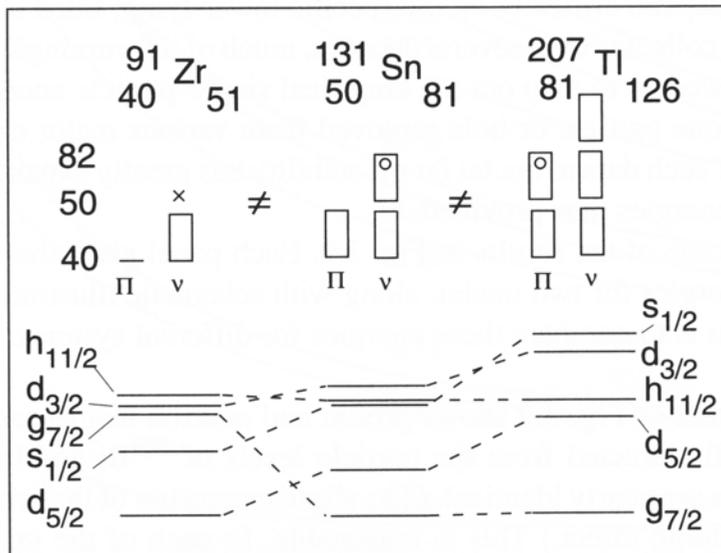
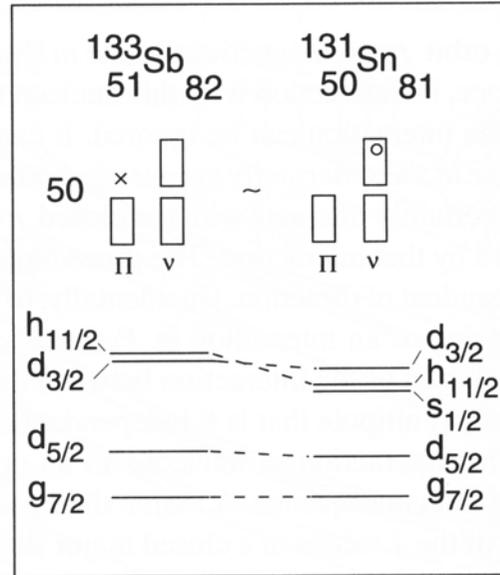
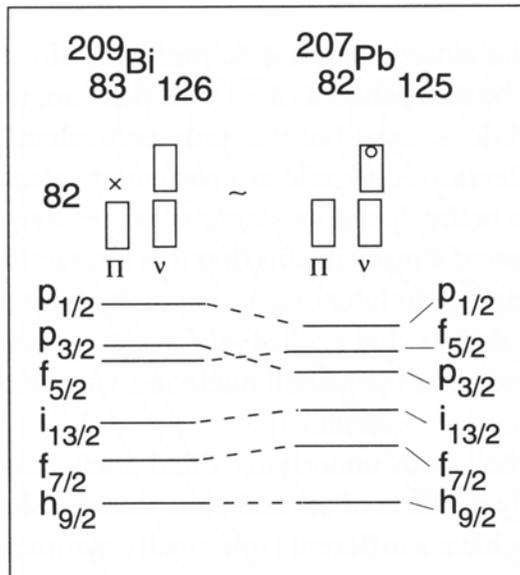
Angeregte Zustände im Kern



- Sequenz nicht perfekt
- Energien nicht perfekt

→ Restwechselwirkung wird benötigt

WW eines j-Orbitals mit einer geschlossenen Schale

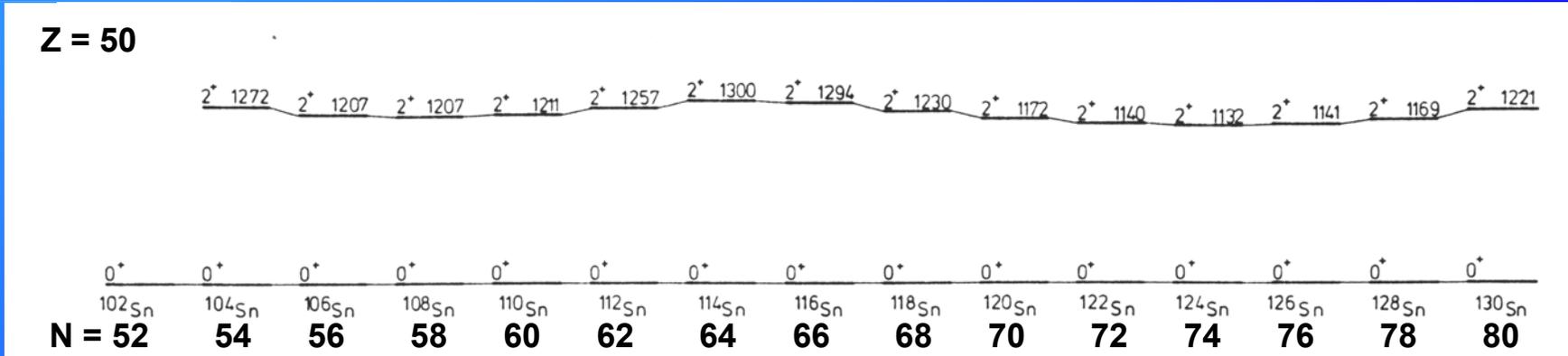


- für verschiedene j-Orbitale kann die WW mit einer geschlossenen Schale unterschiedlich sein

- für ein j-Orbital kann die WW mit verschiedenen geschlossenen Schalen unterschiedlich sein

Deformation durch p-n-Wechselwirkung

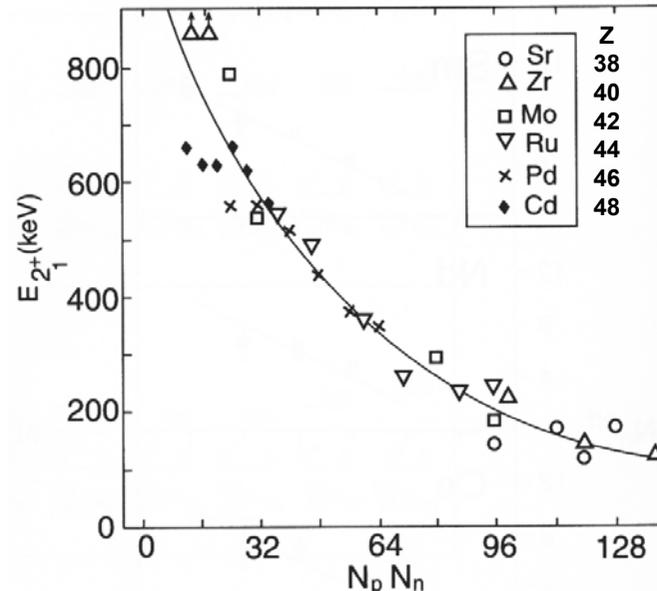
Allein Neutronen außerhalb der geschlossenen Schale führen nicht zu Deformation!!



Es werden sowohl Neutronen als auch Protonen zur Deformation benötigt!!

$N_p N_n$ -Schema

N_p Anzahl der Protonen
 N_n Anzahl der Neutronen
 außerhalb einer
 abgeschlossenen Schale



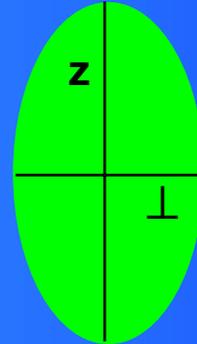
⇒ **Deformation wird durch p-n-Wechselwirkung getrieben!!**

Deformiertes Schalenmodell

... zur Erinnerung

Nilsson-Modell

- deformiertes Oszillatorpotenzial
- axiale Symmetrie um z-Achse



$$\omega_x = \omega_y \equiv \omega_{\perp}$$

$$\omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z = \omega_0^3$$

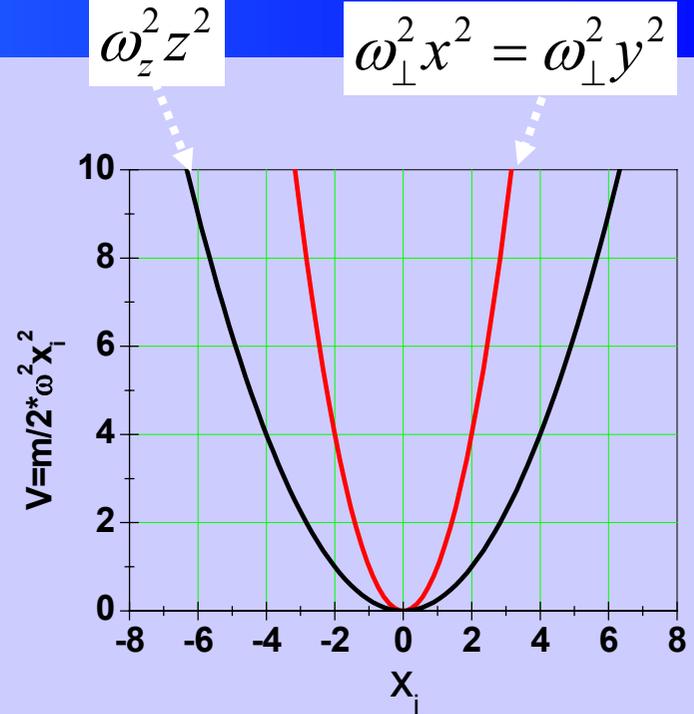
Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m}{2} (\omega_{\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2) + C \cdot \vec{L} \cdot \vec{S} + D \cdot \vec{L}^2$$

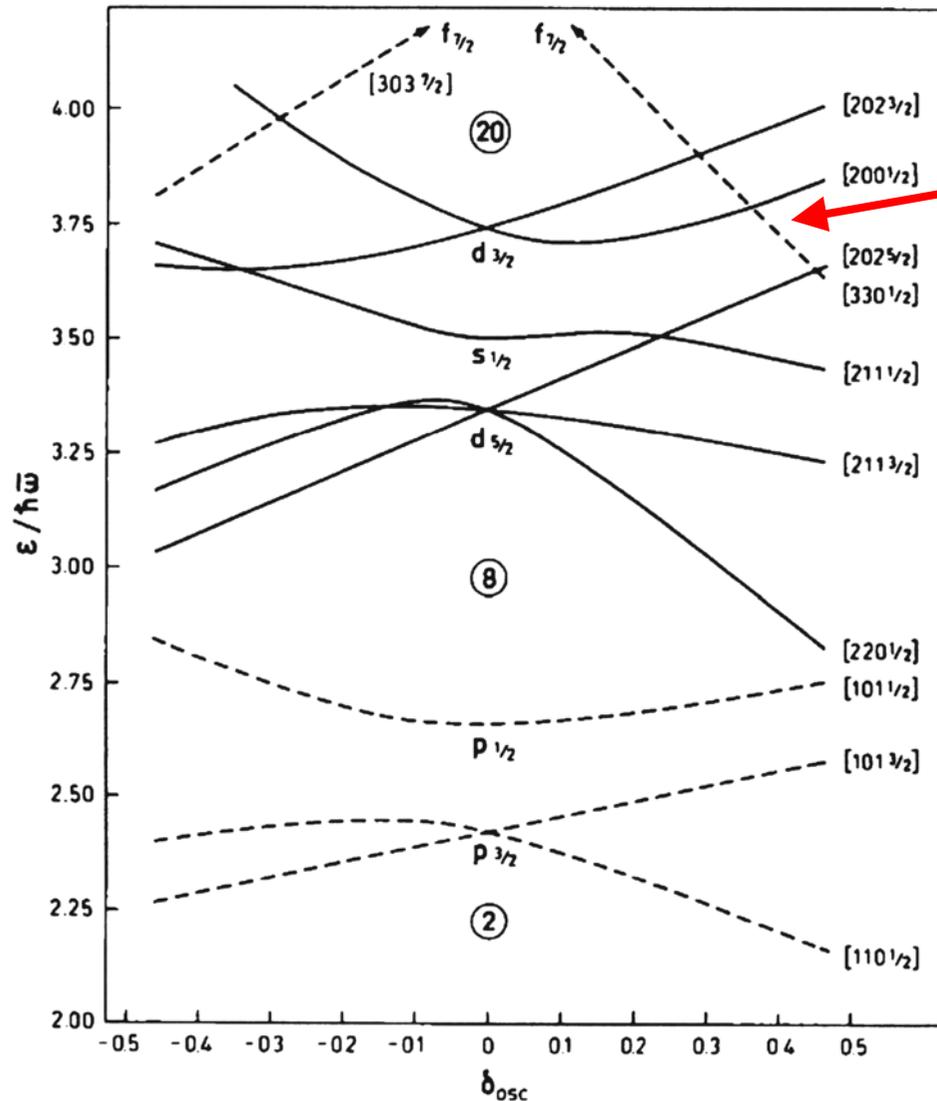
Deformationsparameter δ

$$\omega_{\perp}^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} \delta\right) \quad \omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \delta\right)$$

$$H = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 + C \cdot \vec{L} \cdot \vec{S} + D \cdot \vec{L}^2}_{\text{Schalenmodell mit H.O. Potential}} - \underbrace{m \omega_0^2 r^2 \delta \frac{4}{3} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Y_{20}(\theta, \Phi)}_{H_{\text{def}}}$$



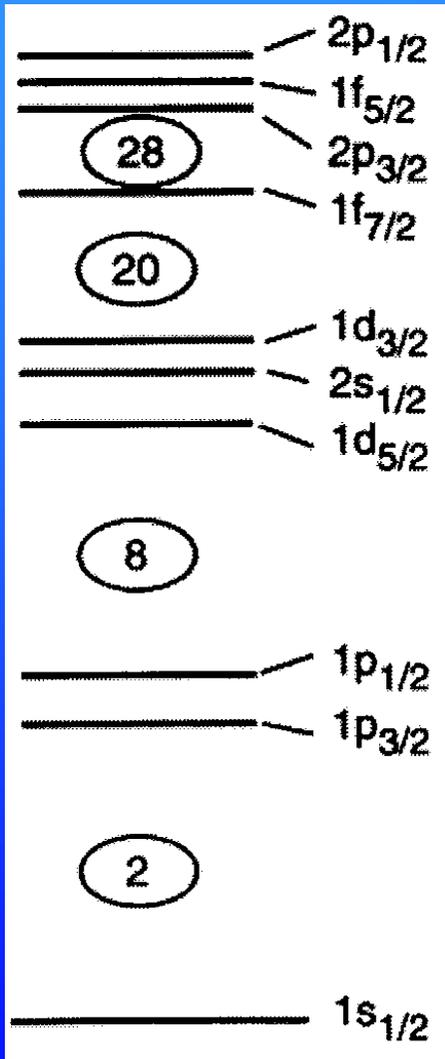
Modifikation der Schalen durch Deformation



Intruder

Orbital wird soweit angehoben oder abgesenkt, dass es Orbitale aus einer anderen Schale entgegengesetzter Parität kreuzt

Schalen für Kerne mit $A < 50$



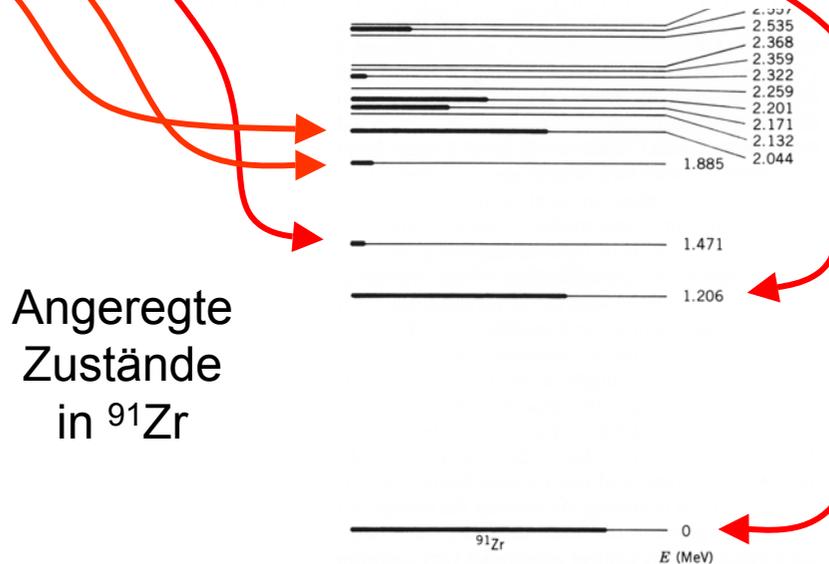
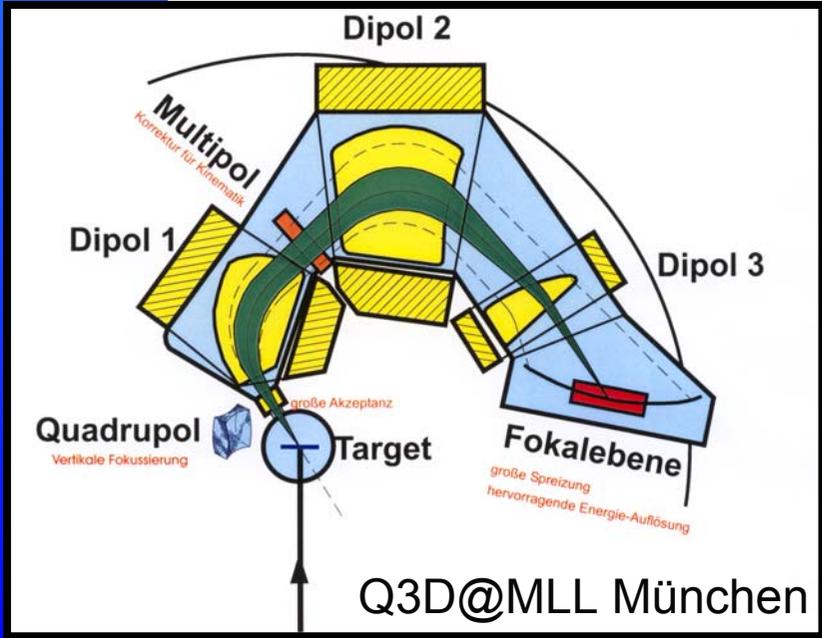
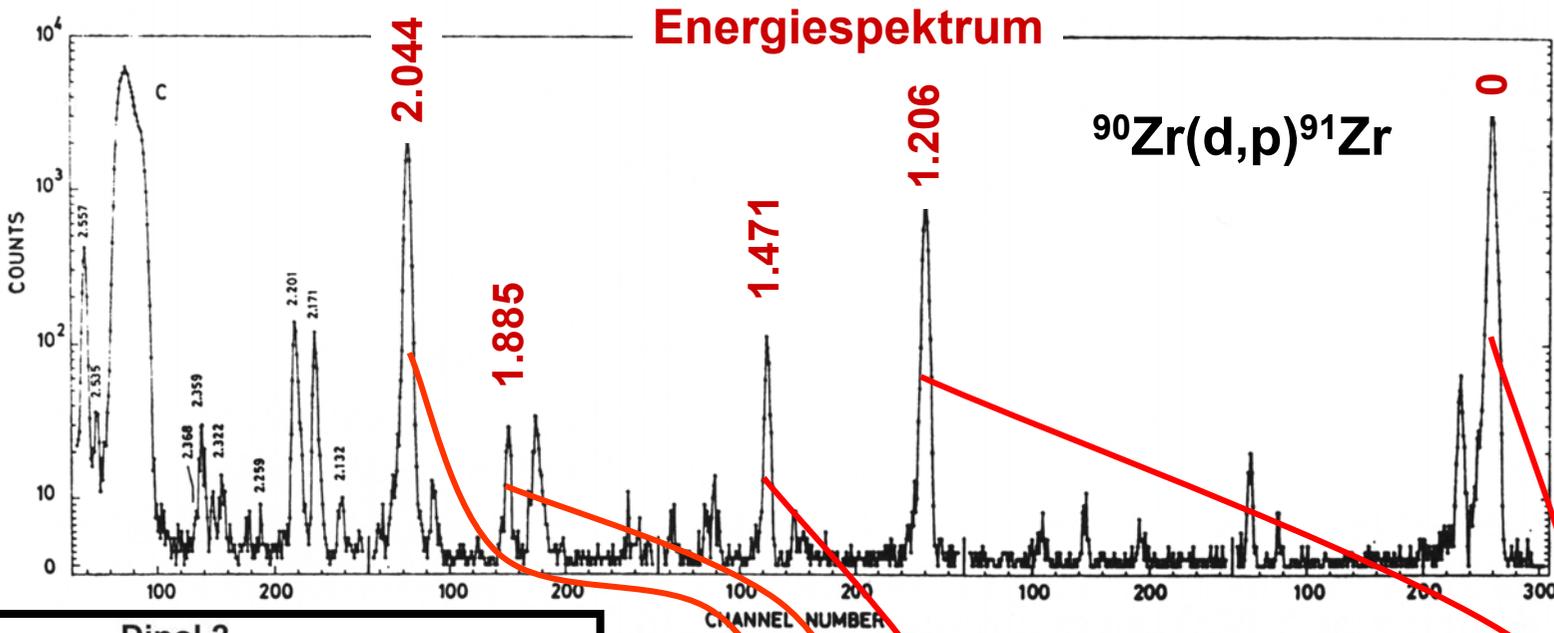
pf-Schale

sd-Schale

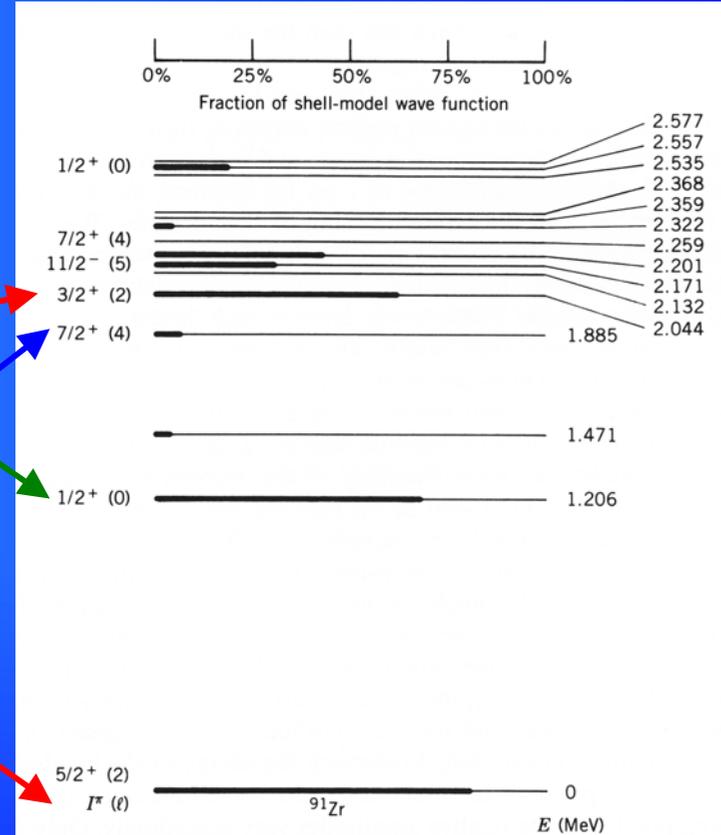
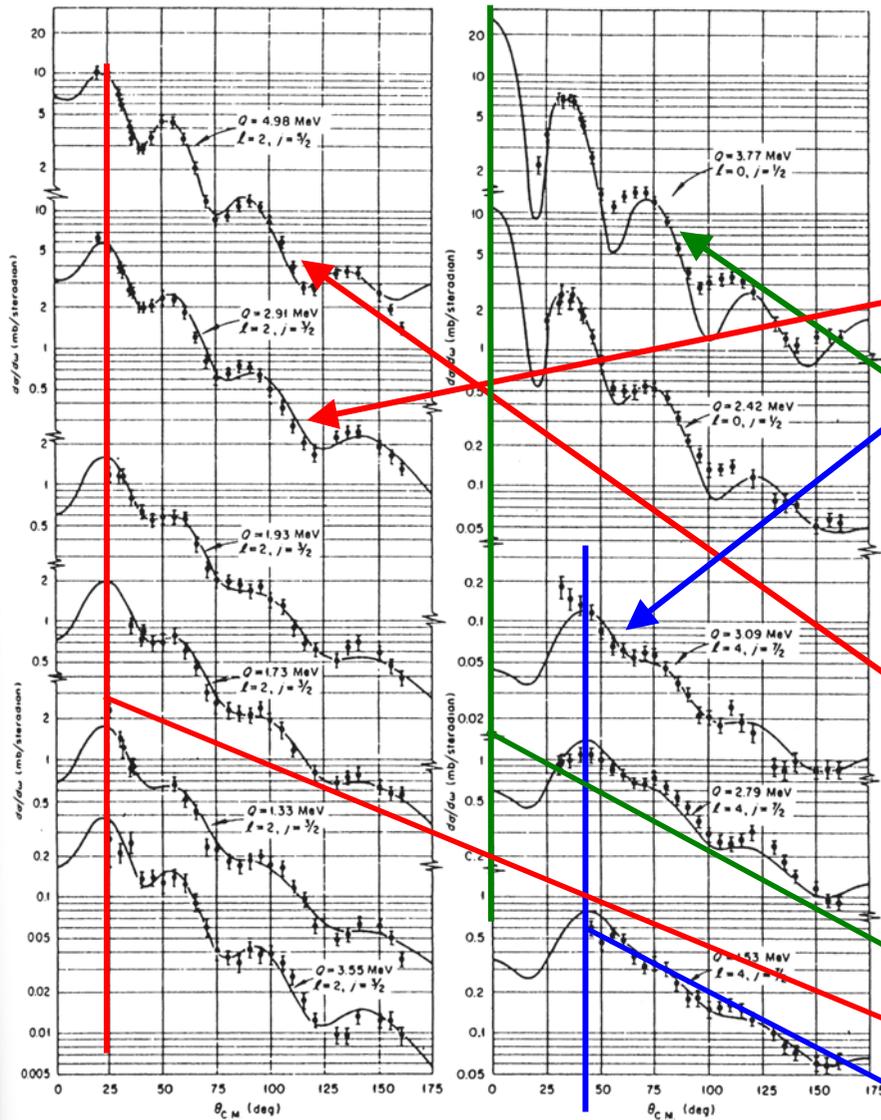
p-Schale

Wie bestimmt man die Konfiguration bzw. Wellenfunktion eines Zustands?

Transferreaktionen 1 - Niveauschema



Transferreaktionen 2 - Winkelverteilung



1. Maximum

$\theta=0^\circ \rightarrow l=0$

$\theta \approx 25^\circ \rightarrow l=2$

$\theta \approx 46^\circ \rightarrow l=4$

Winkelverteilung $\rightarrow l$
 + polarisierter Strahl $\rightarrow j$

Transferreaktionen 3 – Spektroskopische Faktoren

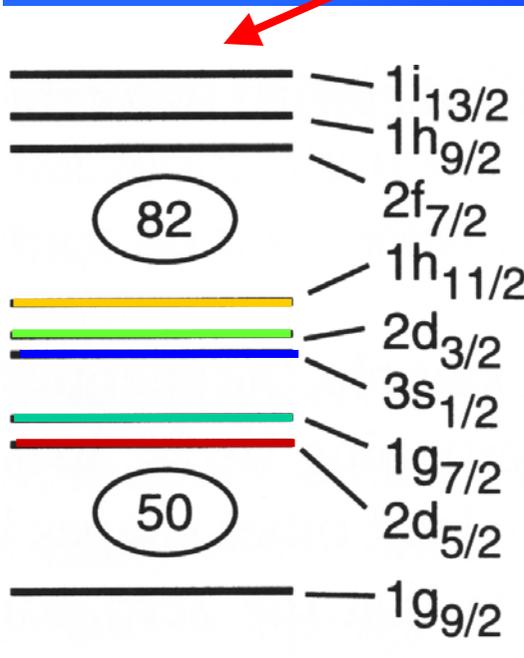
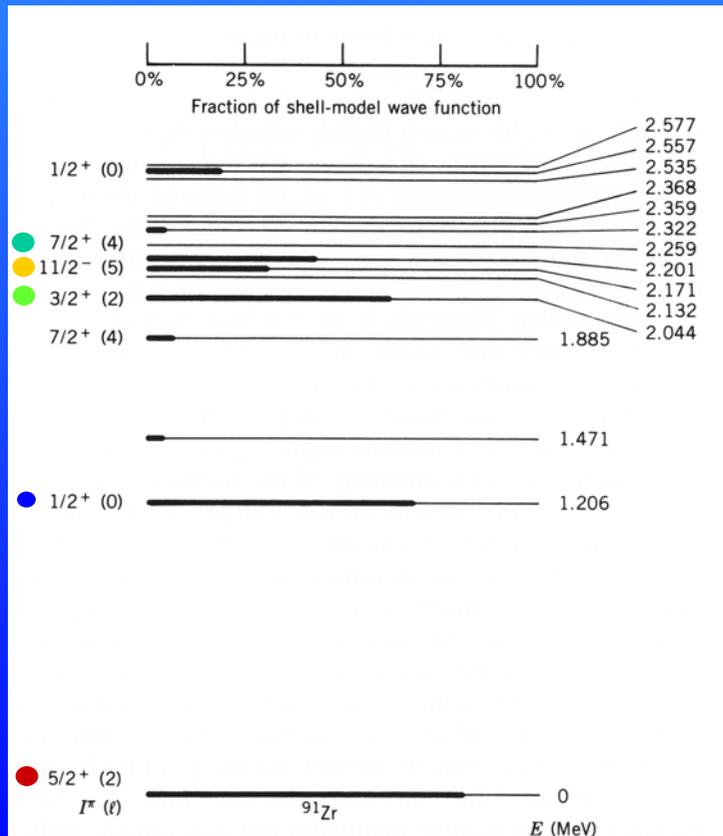
Vergleich des gemessenen und des theoretischen Wirkungsquerschnitts

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp}} = S \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{theo}}$$

Spektroskopischer Faktor

Der **spektroskopische Faktor** misst, wie gut ein realer Zustand mit einem Schalenmodellzustand überlappt:

$$S \propto \left| \left\langle \Phi_i(^{90}\text{Zr}) \otimes \phi_{SM}(n) \mid \Phi_f(^{91}\text{Zr}) \right\rangle \right|^2$$

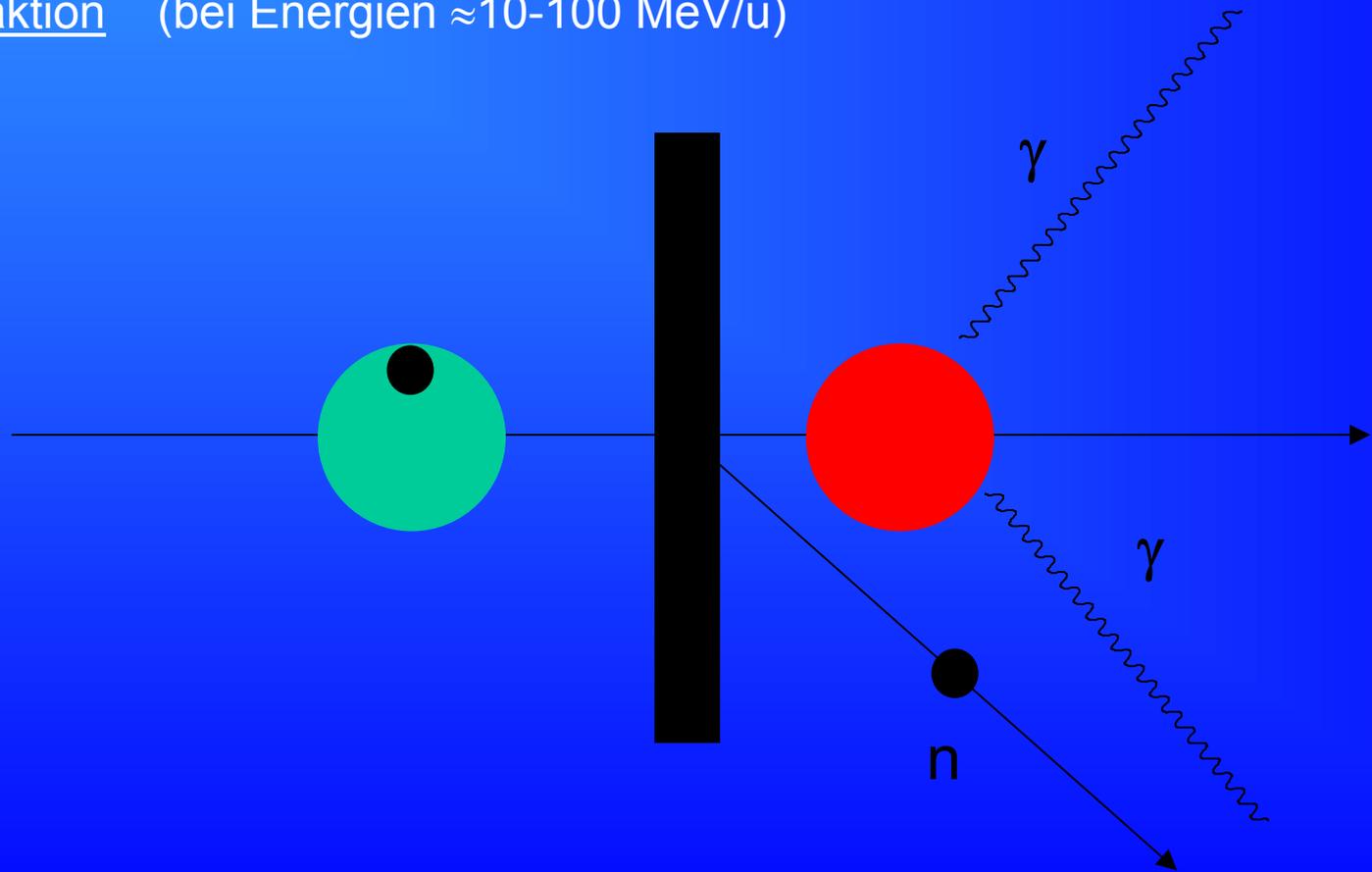


Restwechselwirkung mischt Konfigurationen
 → reale Zustände oft keine guten Schalenmodellzustände

Knock-out Reaktion

Exotische radioaktive Kerne existieren nur als Strahl, nicht als Target

- Transferreaktion in inverser Kinematik,
z. B. $d(A, A+1)p$ (bei Energien $\approx \text{MeV/u}$)
- Knock-out Reaktion (bei Energien $\approx 10\text{-}100 \text{ MeV/u}$)



Wirkungsquerschnitt für Knock-out

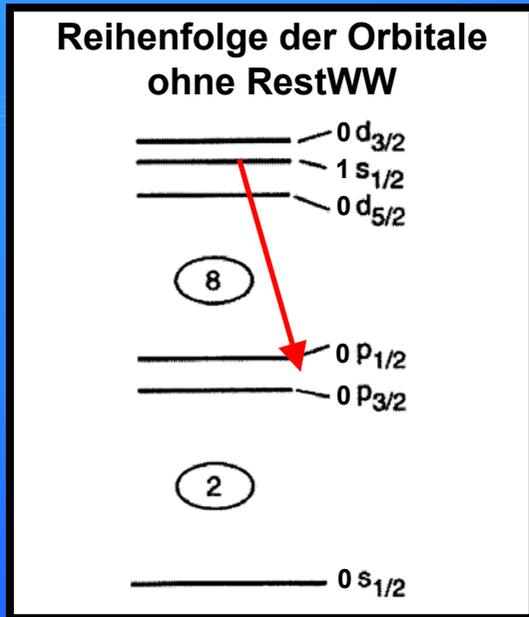
Wirkungsquerschnitt
für Endzustand I^π

$$\sigma(nI^\pi) = \sum_j S(nI^\pi, lj) \sigma_{sp}(B_N, lj)$$

Spektroskopischer Faktor:
Überlapp zwischen Zuständen
im Eingangs- und Ausgangskanal

Wirkungsquerschnitt ein
Nukleon aus einem
Einteilchenzustand (lj) und
Separationsenergie B_N
herauszuschlagen

n-Wellenfunktion des Grundzustands von ^{12}Be (N=8)



	$\frac{1780}{(0p)^6-(1s,0d)^1}$	$5/2^+$
	(ungebunden)	
	$\frac{320}{(0p)^7}$	$1/2^-$
$\frac{(0p)^6-(1s,0d)^2}{(0p)^8}$	$\frac{(0p)^6-(1s,0d)^1}{^{11}\text{Be}}$	$1/2^+$
^{12}Be		

Grundzustand von ^{11}Be :
Intruder-Konfiguration!!!

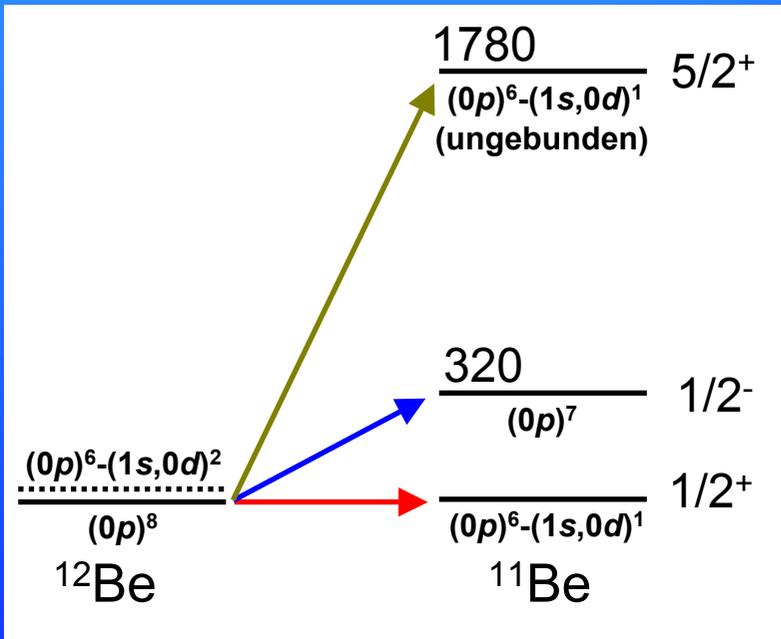
^{12}Be : N=8 \Rightarrow Grundzustand hat reine $(0s)^2-(0p)^6$ Konfiguration (abgekürzt als $(0p)^8$)
SM-Rechnungen: Konfigurationen $(0p)^8$ und $(0p)^6-(1s,0d)^2$ nahezu entartet
 \Rightarrow Grundzustand wird Mischung aus beiden:

$$\Phi = \alpha (0p)^8 + \beta \{ (0p)^6 \otimes [\gamma_1 (0d_{5/2})^2 + \gamma_2 (1s_{1/2})^2 + \gamma_3 (0d_{3/2})^2] \}$$

(Amplituden $\gamma_{1,2,3}$ aus SM-Rechnung; J=0-Paare energetisch bevorzugt!)

^{11}Be : Reihenfolge in der sd-Schale: $1s_{1/2}$, $0d_{5/2}$ und $0d_{3/2}$
Grundzustand hat Intruder-Konfiguration

Experiment: Knock-out eines n aus ^{12}Be



$$\Phi(^{12}\text{Be}) = \alpha (0p)^8 + \beta \{ (0p)^6 \otimes [\gamma_1 (0d_{5/2})^2 + \gamma_2 (1s_{1/2})^2 + \gamma_3 (0d_{3/2})^2] \}$$

Knock-out eines der Neutronen aus ^{12}Be

- $0p_{1/2} \rightarrow 1/2^-$ - Zustand in ^{11}Be $I=1$ Neutron
- $1s_{1/2} \rightarrow 1/2^+$ - Zustand in ^{11}Be $I=0$ Neutron
- $0d_{5/2} \rightarrow 5/2^+$ - Zustand in ^{11}Be $I=2$ Neutron

Spektroskopischer Faktor

$$S = \frac{A-1}{A} n \left| \langle \Phi(^{11}\text{Be}) \otimes \phi(n) | \Phi(^{12}\text{Be}) \rangle \right|^2$$

$$= \frac{A-1}{A} n (c.f.p.)^2$$

„coefficient of fractional parentage“

Beispiel: Berechnung von spektroskopischen Faktoren

$$S = \frac{A-1}{A} n \left| \langle \Phi(^{11}\text{Be}) \otimes \phi(n) | \Phi(^{12}\text{Be}) \rangle \right|^2$$

$$= \frac{A-1}{A} n (c.f.p.)^2$$

Beispiel:
1 Neutron aus $(0p_{1/2})^2$ -Orbital
herausschlagen

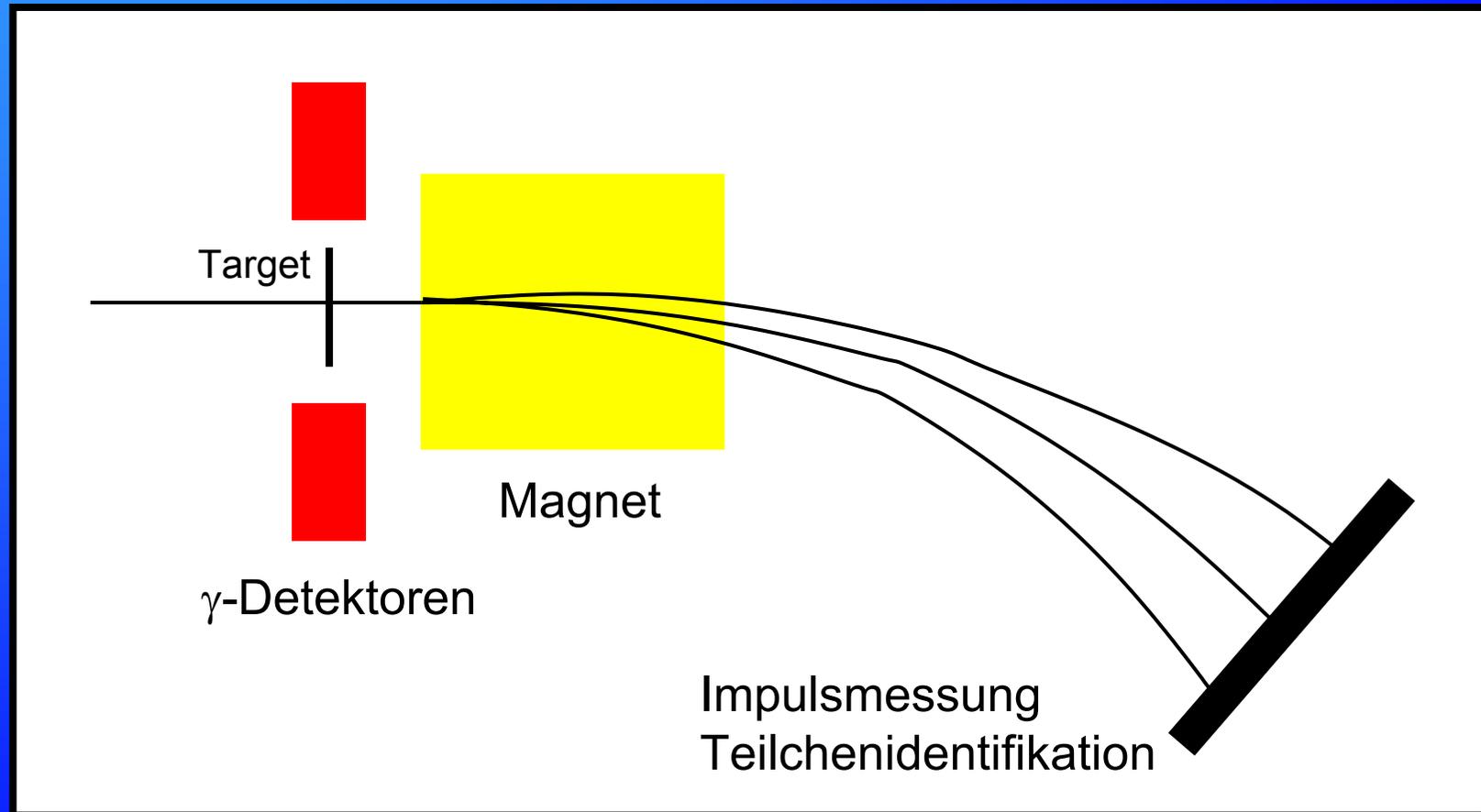
$$S = \frac{10}{11} \cdot 2 \cdot 1^2 = 1.82$$

B.3. Coefficients of fractional parentage

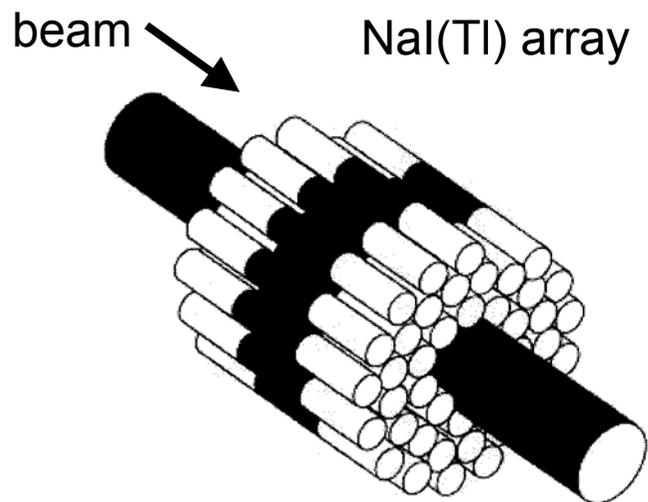
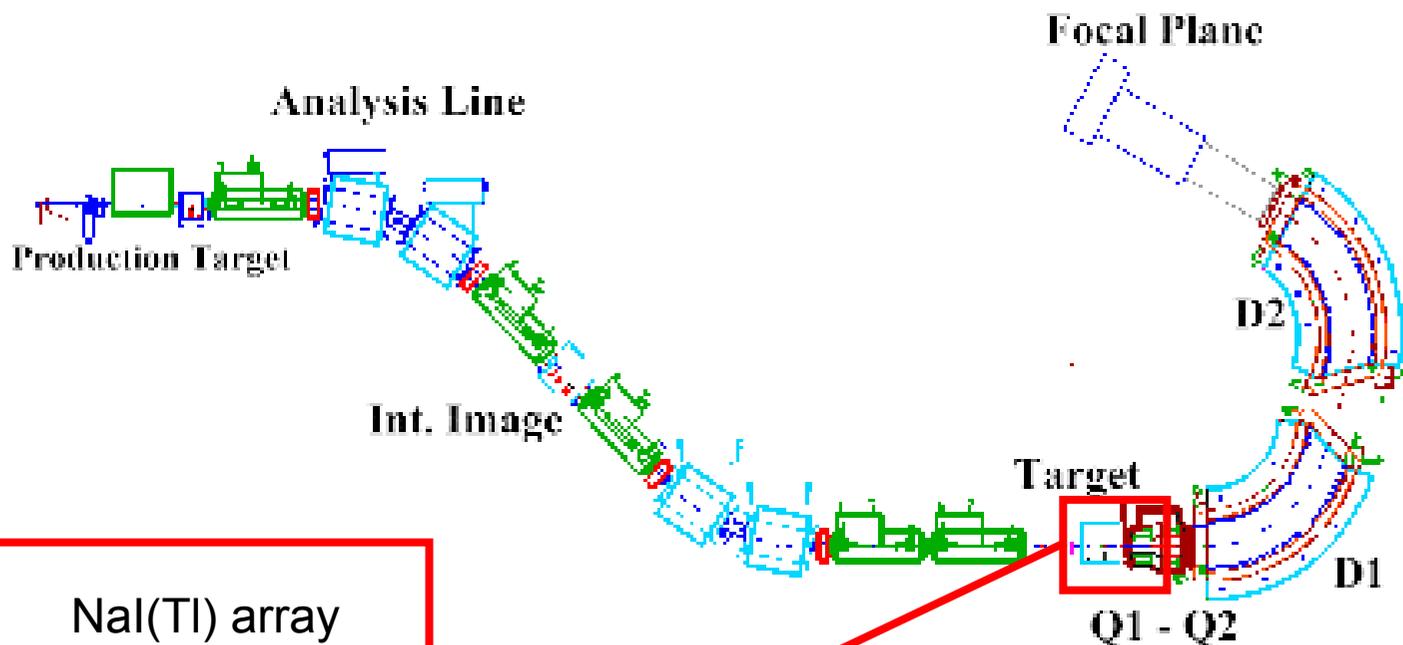
The coefficients of fractional parentage $\langle j^n JTvt | j^{n-1} J' T' v' t' \rangle$ for $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ and $\frac{5}{2}$ with $n \leq 3$ are given below. The state j^n is characterized by the quantum numbers J (total spin), T (total isospin), v (seniority) and t (reduced isospin). The phase convention corresponds to that of the Oak Ridge-Rochester shell-model code [French, Halbert, McGrory and Wong (1969); McGrory (1967)].

$n = 1$ or 2 ; for all j -values		$\langle j^n JTvt j^{n-1} J' T' v' t' \rangle = +1$			
$n = 3; j = \frac{1}{2}$		$\langle (\frac{1}{2})^3 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 0 1 0 0 \rangle = -0.7071$			
		$\langle (\frac{1}{2})^3 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 1 0 2 0 \rangle = +0.7071$			
$n = 3; j = \frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2})^2$	$(JTvt)$			
	$(\frac{3}{2})^3$	(0100)	(1020)	(2121)	(3020)
	$(J' T' v' t')$				
	$(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 3 \frac{1}{2})$	0	-0.7071	-0.7071	0
	$(\frac{3}{2} \frac{1}{2} 1 \frac{1}{2})$	-0.6455	+0.3873	-0.2887	+0.5916
	$(\frac{3}{2} \frac{3}{2} 1 \frac{1}{2})$	+0.4082	0	-0.9129	0
	$(\frac{5}{2} \frac{1}{2} 3 \frac{1}{2})$	0	+0.4830	-0.7071	-0.5164
	$(\frac{7}{2} \frac{1}{2} 3 \frac{1}{2})$	0	0	-0.7071	+0.7071

Experimentaufbau (schematisch)

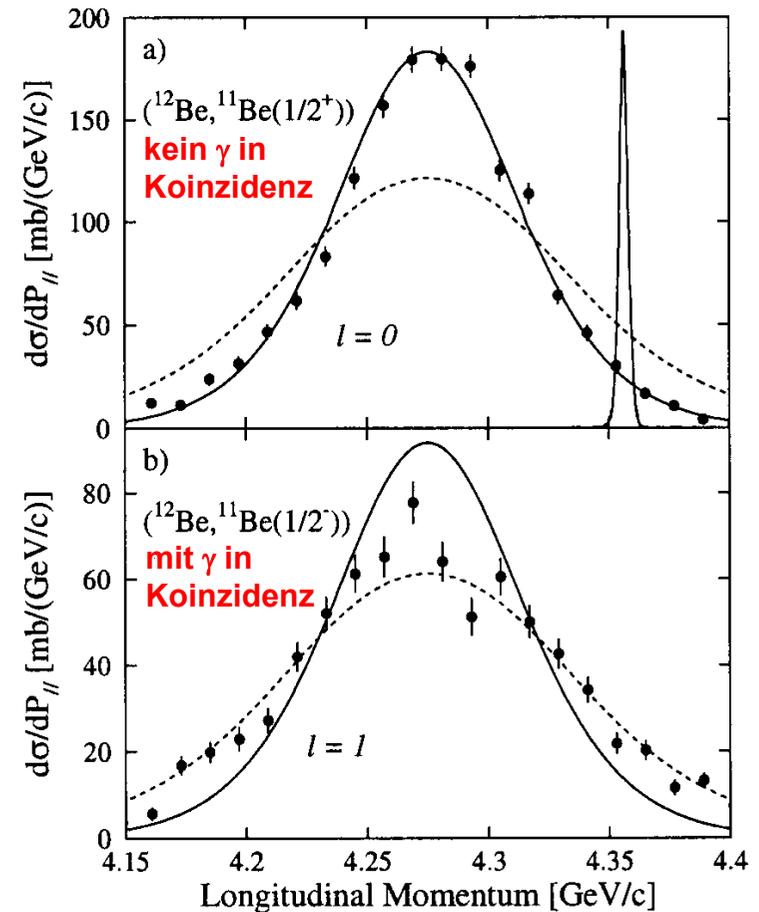
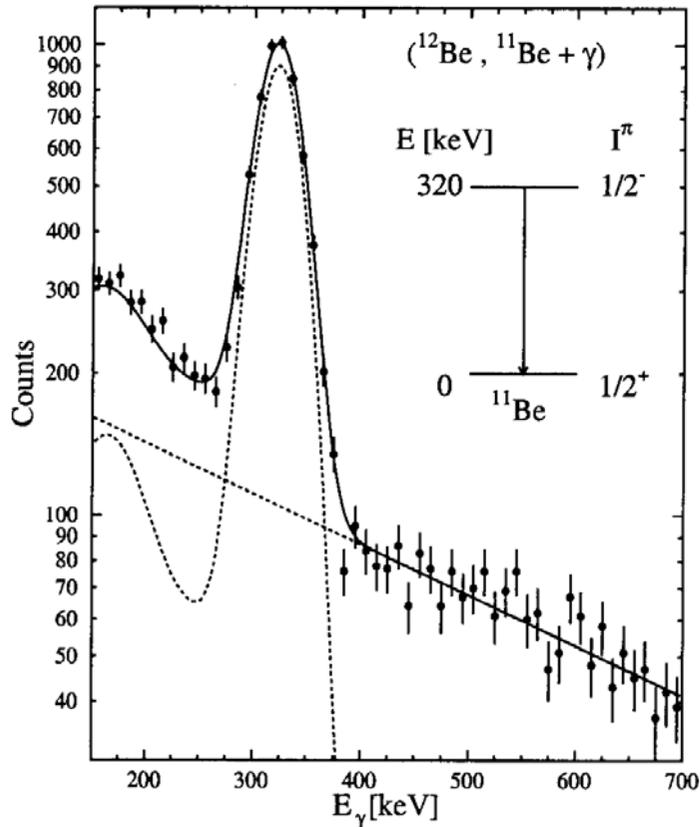


A800-Spektrograph@MSU



Knock-out eines n aus ^{12}Be (N=8) @ 78 MeV/u

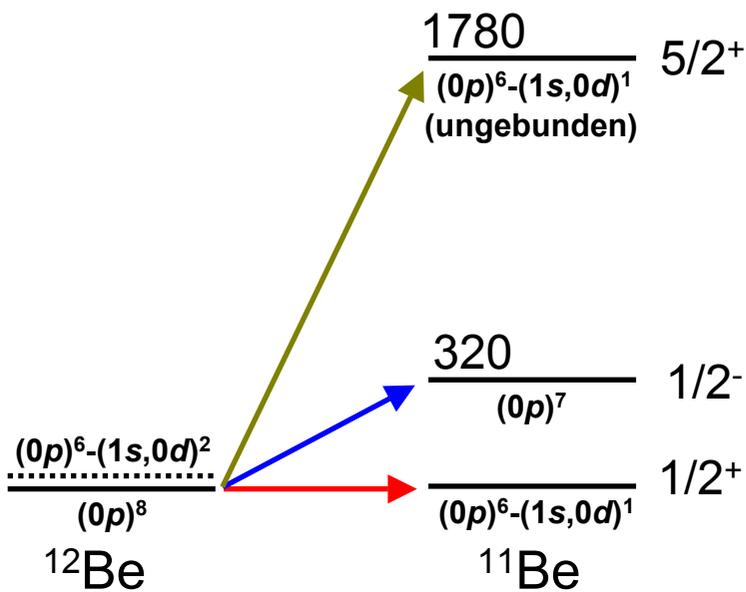
γ -Spektrum in Koinkidenz mit ^{11}Be -Restkern



Messung der Impulsverteilung erlaubt Bestimmung des Drehimpulsübertrags

Analyse: Knock-out eines n aus ^{12}Be

j^π	E (MeV)	σ_{exp} (mb)	σ_{sp} (mb)	S_{exp}	S_{exp}^*	WBT	S_{th}	WBT2
$1/2^+$	0	32.0 ± 4.7	75.9	0.42 ± 0.10	0.53 ± 0.13	0.51		0.69
$1/2^-$	0.32	17.5 ± 2.6	47.2	0.37 ± 0.10	0.45 ± 0.12	0.91		0.58
$5/2^+$	1.8	0.40		0.55



$$\Phi_{\text{gs}}(^{12}\text{Be}) = \alpha (0p)^8 + \beta \{ (0p)^6 \otimes [\gamma_1 (0d_{5/2})^2 + \gamma_2 (1s_{1/2})^2 + \gamma_3 (0d_{3/2})^2] \}$$

g.s. von ^{12}Be ist eine reine $(0p)^8$ Konfiguration

$$S(1/2^-) = 1.82, \quad S(1/2^+) = 0 \quad \text{und} \quad S(5/2^+) = 0$$

g.s. von ^{12}Be ist Mischung aus $(0p)^8$ und $(0p)^6-(1s,0d)^2$

$$\begin{aligned} S(1/2^-) &= 1.82 && \text{reiner } (0p)^8 \rightarrow (0p)^7 \\ S(1/2^+) &= 1.02 && \text{reiner } (0p)^6-(1s,0d)^2 \rightarrow (0p)^6-(1s,0d)^1 \\ S(5/2^+) &= 0.81 && \text{reiner } (0p)^6-(1s,0d)^2 \rightarrow (0p)^6-(1s,0d)^1 \end{aligned}$$

Verteilung der Stärke auf die Komponenten im Grundzustand von ^{12}Be :

$$\text{WBT:} \quad 50\% (0p)^8 \quad \text{und} \quad 50\% (0p)^6-(1s,0d)^2$$

$$\text{WBT2:} \quad 32\% (0p)^8 \quad \text{und} \quad 68\% (0p)^6-(1s,0d)^2$$

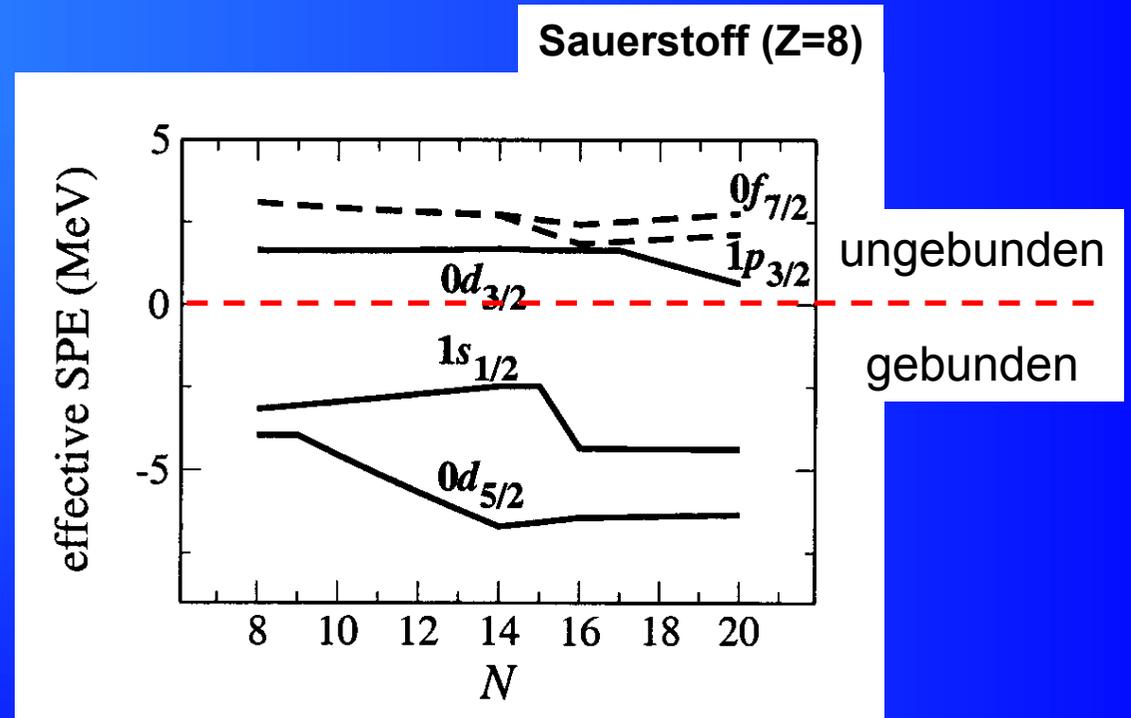
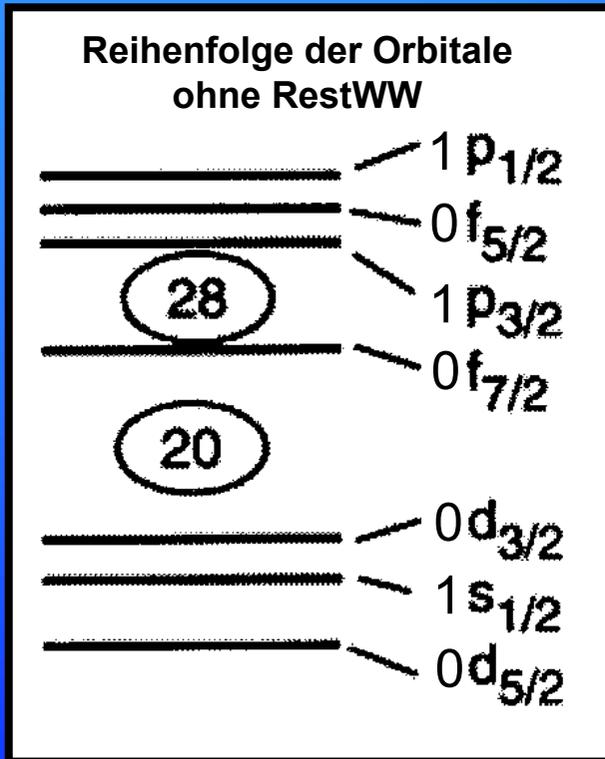
.... $S(1/2^-)_{\text{exp}} = 0.45$ impliziert sogar, dass die Konfiguration $(0p)^8$ im Grundzustand von ^{12}Be nur für 25% der Stärke verantwortlich ist!!!

Kerne um N=20

Es ist sinnvoll die Orbitale unter Berücksichtigung der Rest-WW für jede Kombination N und Z darzustellen

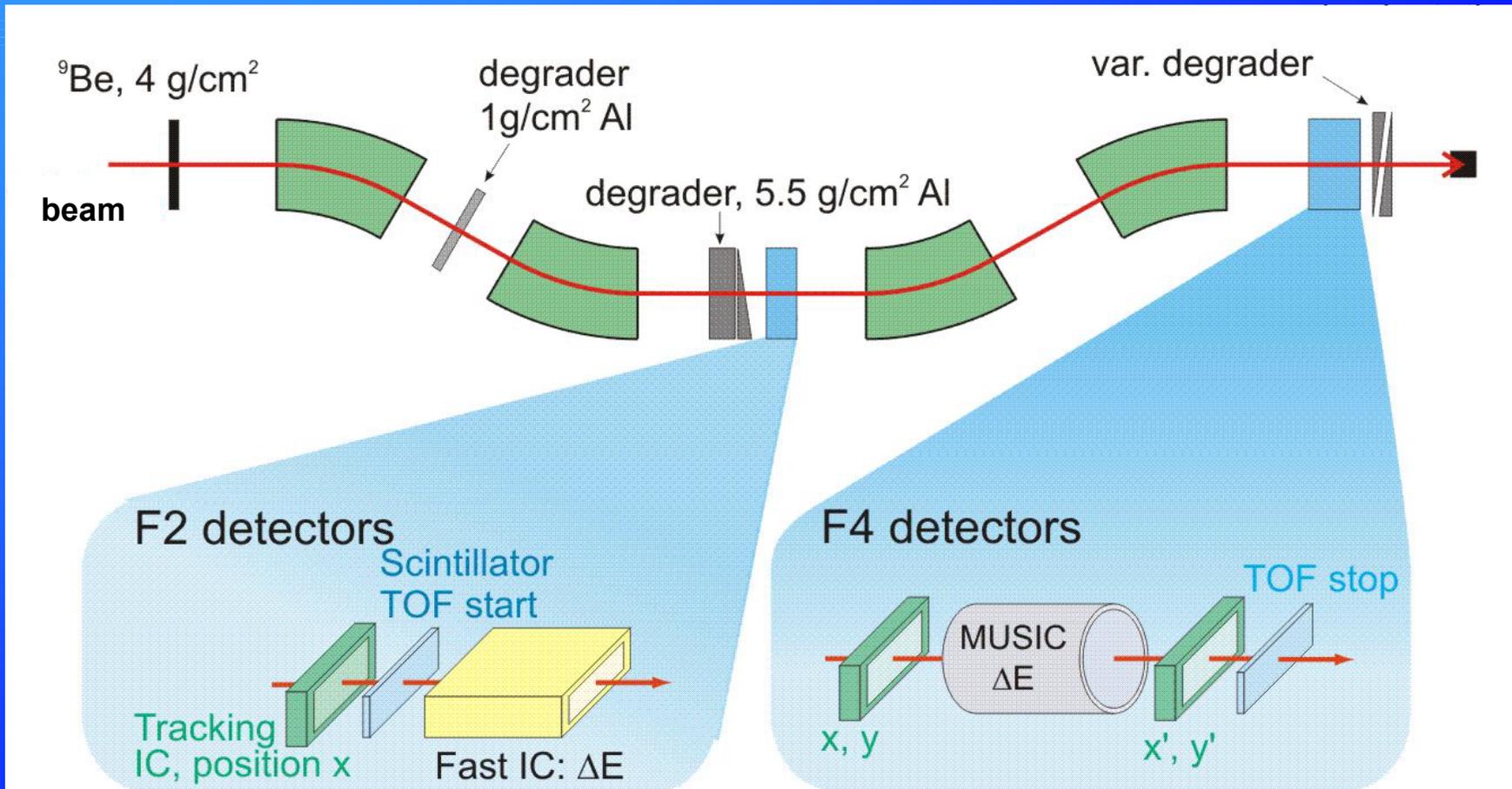
→ Effektive Einteilchenenergien (ESPE)

Einteilchenenergien unter Berücksichtigung der Rest-WW



... welches ist das schwerste gebundene Sauerstoff-Isotop????

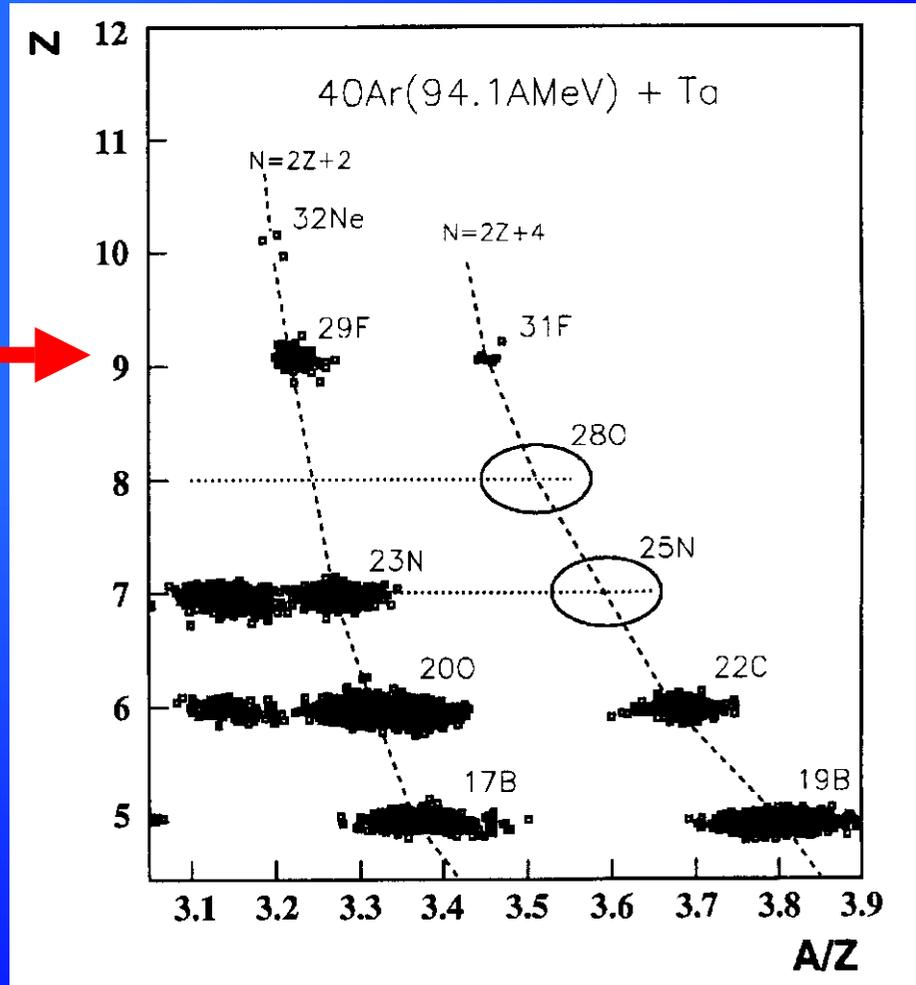
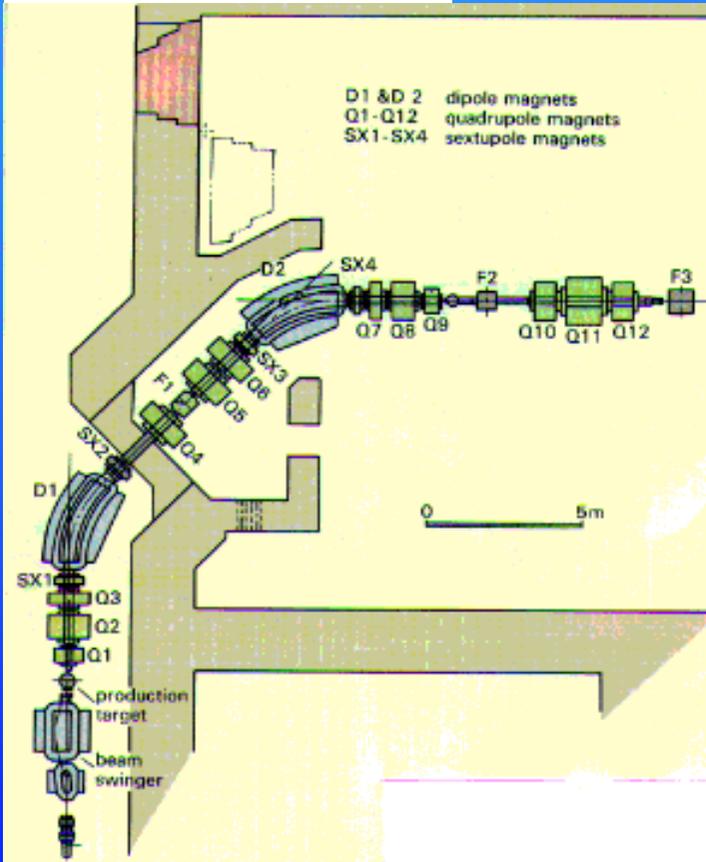
Fragmentseparator – als Beispiel FRS@GSI



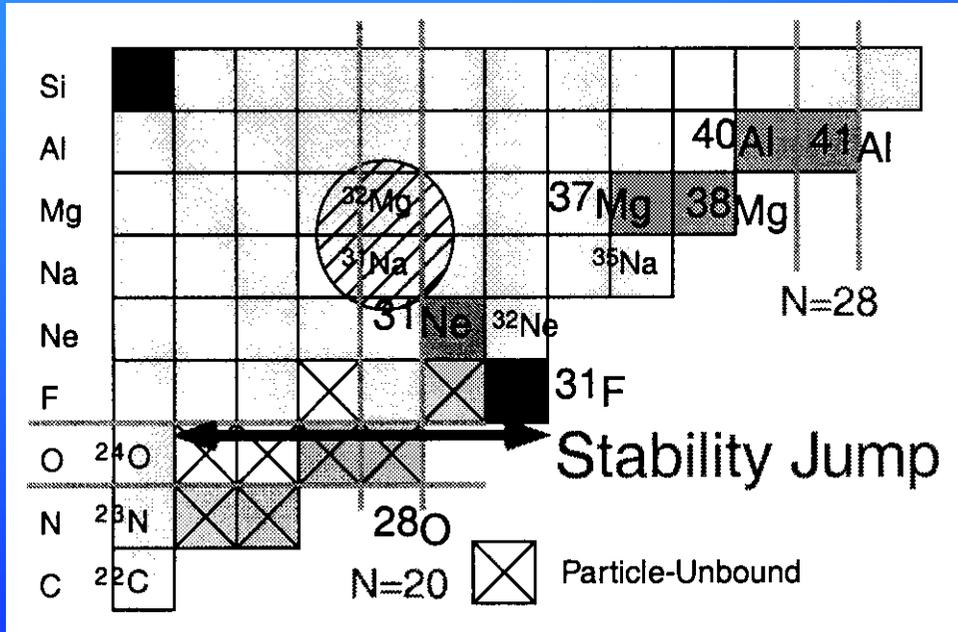
Position x-y → Bahn B_p → p , A/Z
 TOF → v → A
 dE/dx → Z

Typisches Experiment

RIPS@RIKEN



Ergebnisse 1 (N=16)



Sauerstoff-Isotope:

^{24}O (N=16) ist gebunden ✓

^{28}O ist nicht gebunden ✓

+ 1 Proton → Fluor

^{31}F ist gebunden!!!!

... ein Proton mehr kann
weitere 6 Neutronen binden!!!

Theorie: $\sigma\tau$ - $\sigma\tau$ -Wechselwirkung 1

Nukleon-Nukleon-Restwechselwirkung

Ansatz (Monopol-Hamiltonian):

$$V_{j_1 j_2}^{T=0,1} = \frac{\sum_J (2J+1) \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_{JT}}{\sum_J (2J+1)}$$

Zwei-Körper-Matrixelement

z.B. Pairing (Monopol-Anteil):

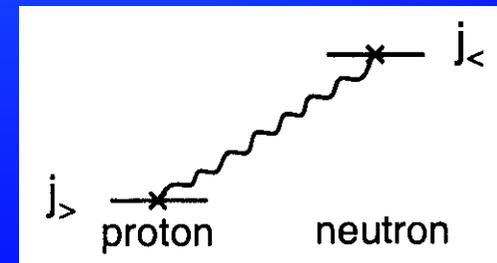
$$V_{Pair} = V_{jj}^{T=1}$$

$\sigma\tau$ - $\sigma\tau$ -Wechselwirkung

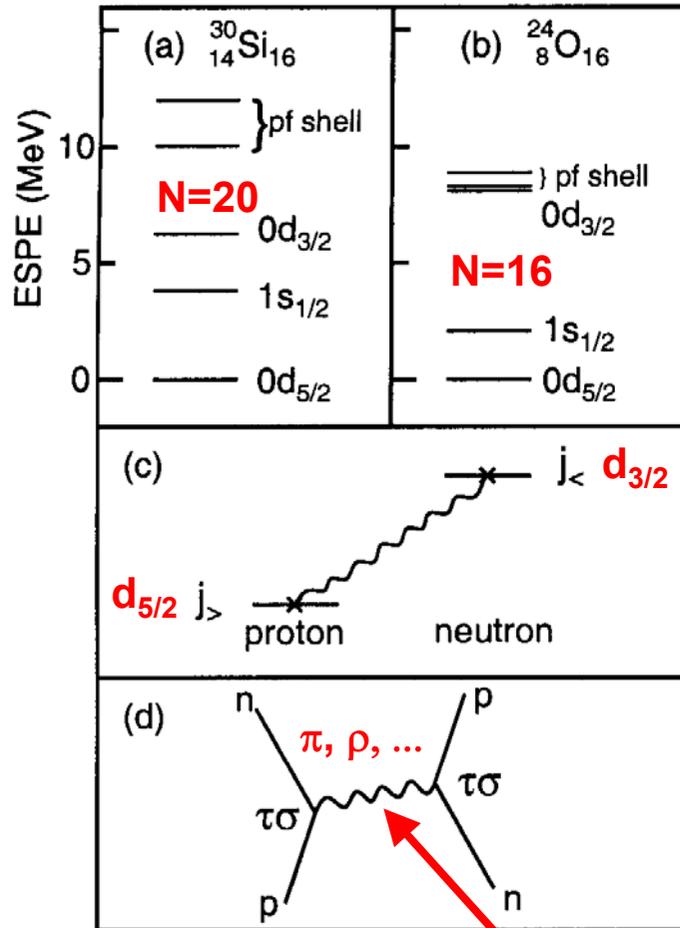
$$V_{\sigma\tau} = \tau \cdot \tau \sigma \cdot \sigma f_{\tau\sigma}(r)$$

Eigenschaften:

- **langreichweitiges** $f_{\tau\sigma}(r)$ koppelt $V_{\sigma\tau}$ nur Zustände mit gleichen Drehimpuls l , also $j_> = l+1/2$ und $j_< = l-1/2$
- σ koppelt **Spin-Orbit-Partner** $j_>$ und $j_<$ stärker als $j_>$ bzw. $j_<$ jeweils untereinander, bevorzugt also **Spinflips**
- τ bevorzugt **Ladungsaustauschprozesse**



Theorie: $\sigma\tau$ - $\sigma\tau$ -Wechselwirkung 2



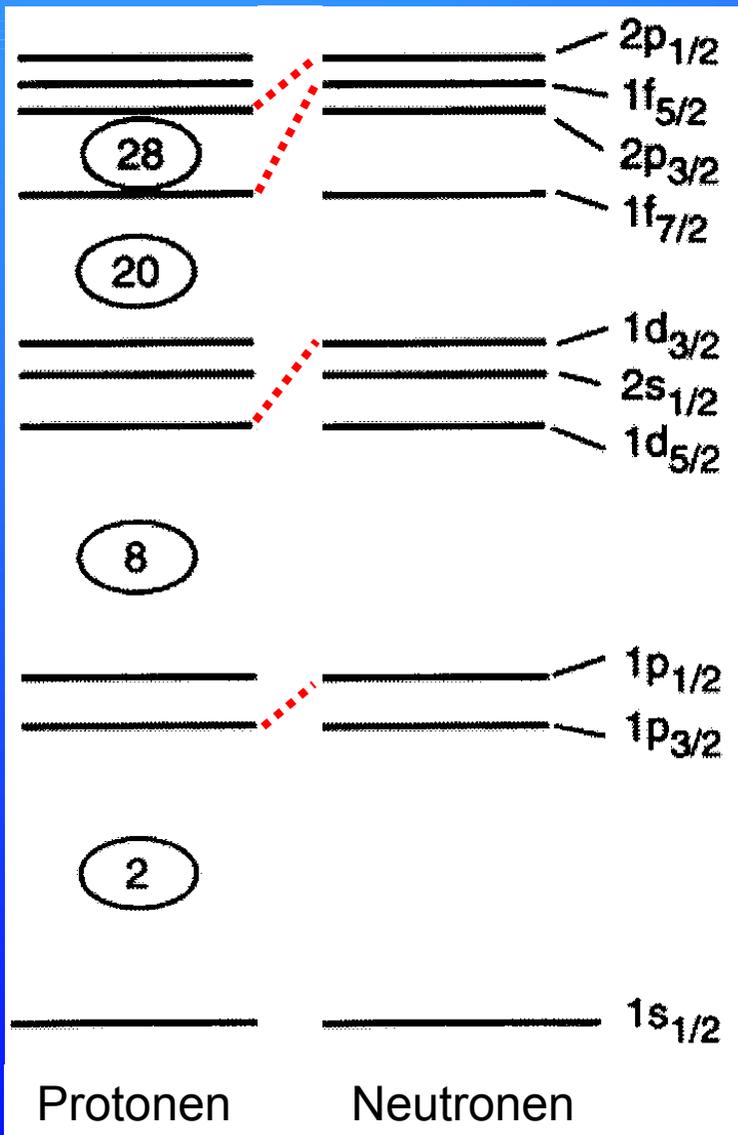
Ohne Protonen im $d_{5/2}$ -Orbital ($Z \leq 8$), d.h. für neutronenreiche Kerne, ist $N=16$ magische Zahl.

Durch attraktive NN-Restwechselwirkung zwischen Protonen im $d_{5/2}$ -Orbital und Neutronen im $d_{3/2}$ -Orbital wird der Abstand zwischen beiden verringert

\Rightarrow wenn das $d_{5/2}$ -Orbital durch Protonen aufgefüllt wird, von $Z=9$ (F) bis $Z=14$ (Si), wird aus der magischen Zahl $N=16$ für neutronenreiche Kerne die bekannte magische Zahl $N=20$ für stabile Kerne.

Ein-Boson-Austauschpotenziale (π, ρ, \dots) haben gerade Terme des Typs $V_{\sigma\tau} = \tau \cdot \tau \sigma \cdot \sigma f_{\tau\sigma}(r)$ als Hauptbeiträge!!!

Anwendung auf andere Schalen



N=6

${}^8\text{He}$ existiert, ${}^9\text{He}$ hingegen nicht.

Neutronen im $p_{1/2}$ -Orbital sind ungebunden ohne Protonen im $p_{3/2}$ -Orbital, ihrem Spin-Orbit-Partner. Die magische Neutronenzahl ist hier $N=6$!!

Erst wenn die Protonen das $p_{3/2}$ -Orbital bevölkern, wird das $p_{1/2}$ -Orbital der Neutronen abgesenkt und die gewohnte magische Zahl $N=8$ entsteht.

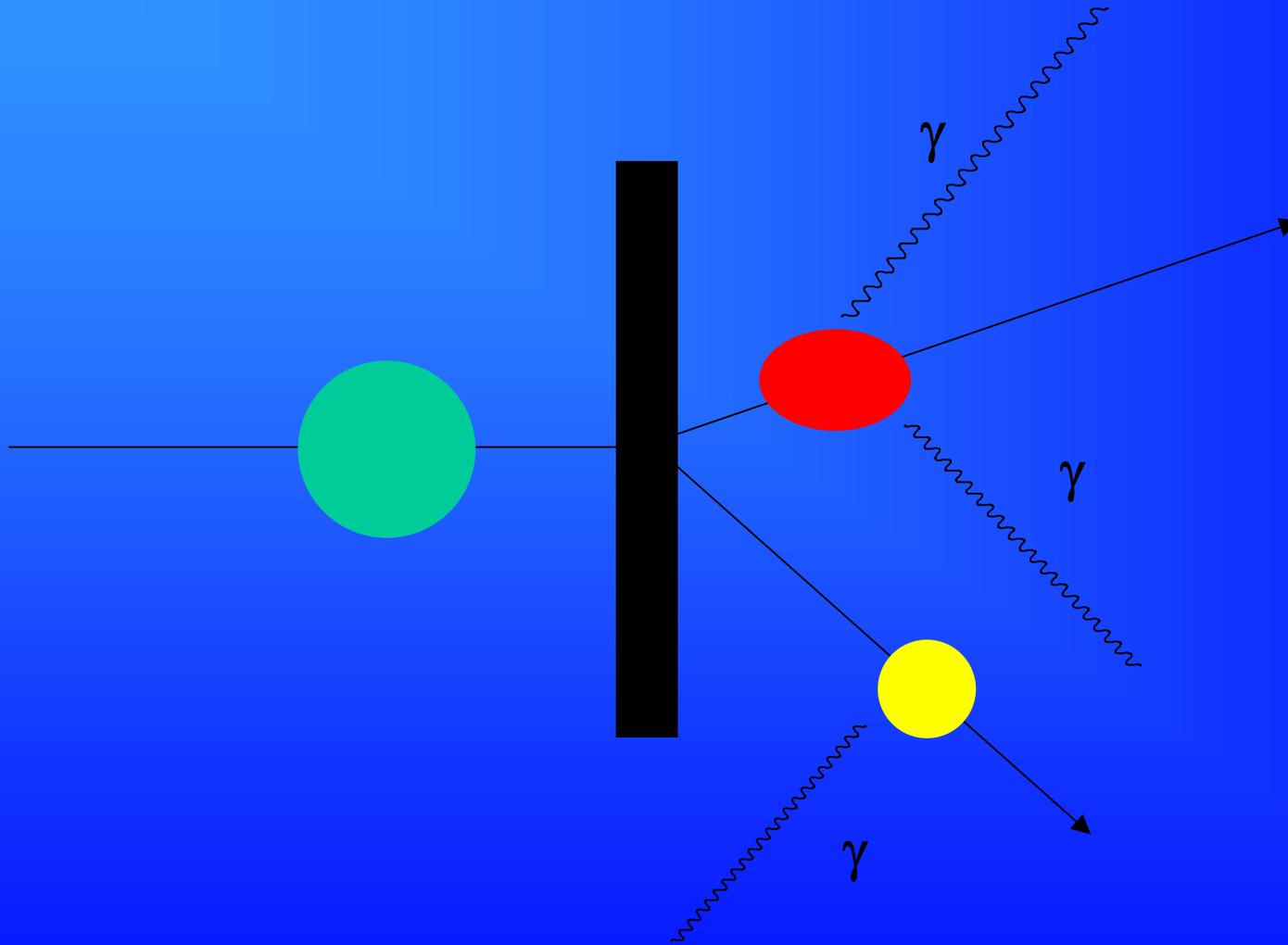
N=34

WW zwischen $f_{7/2}$ und $f_{5/2}$

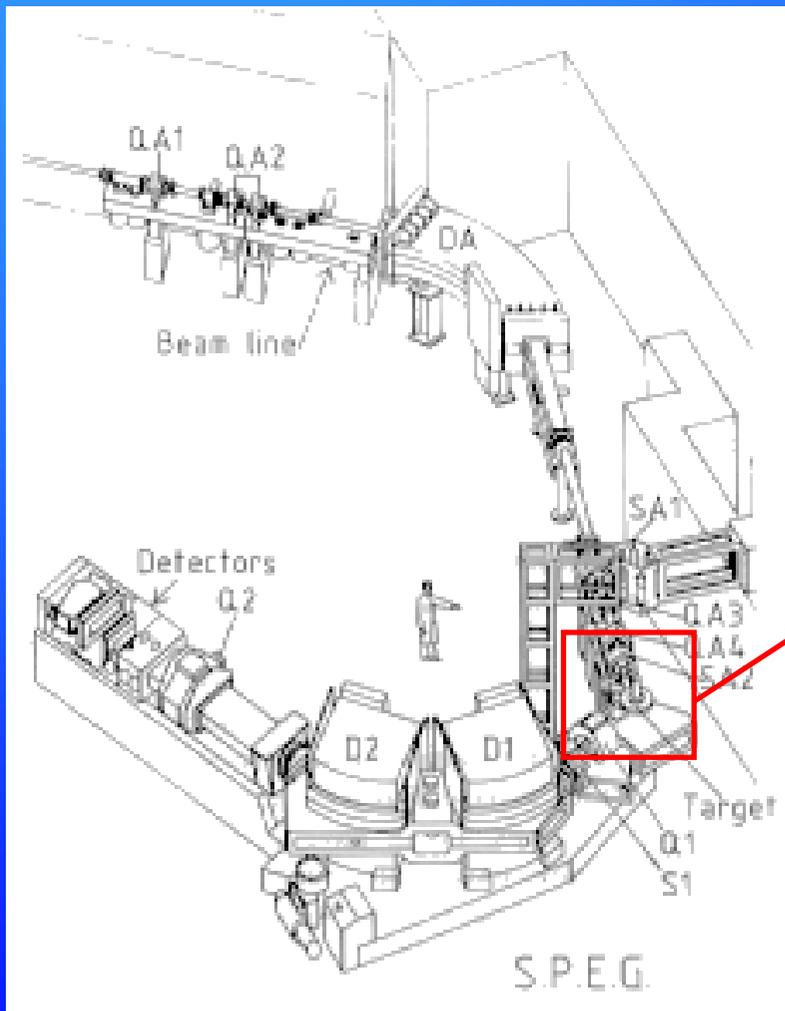
Existenz von Kernen ✓

$E(2^+)$, $B(E2)$, ?

γ -Spektroskopie nach Fragmentierung



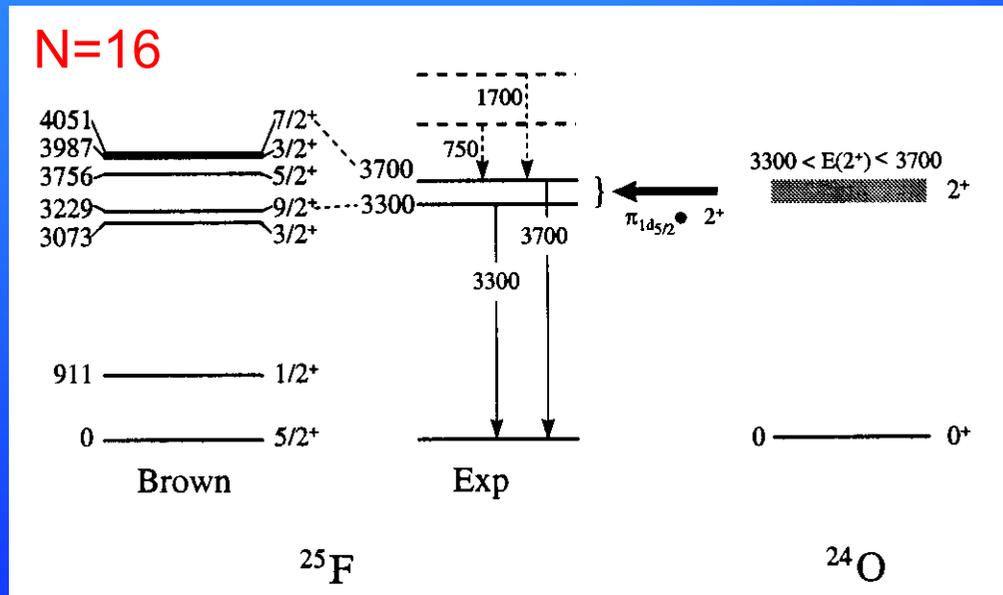
SPEG+EXOGRAM@GANIL



Form von ^{24}O

^{24}O ist gebunden, aber ist es auch sphärisch ?

γ -Spektroskopie $\Rightarrow E(2^+)$

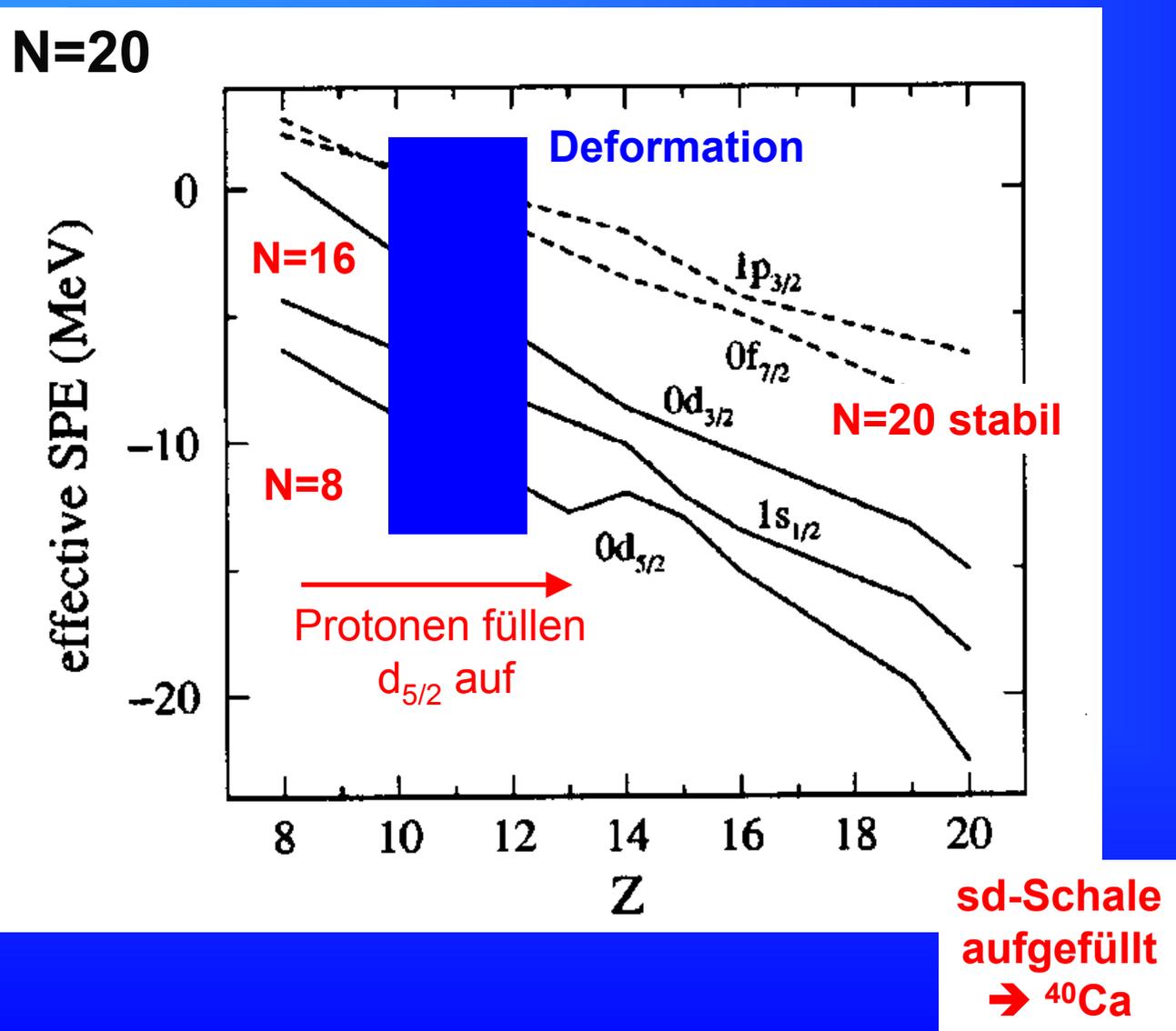


Unklar, ob ^{24}O überhaupt einen gebundenen angeregten Zustand hat

Aber: erste angeregte Zustände in ^{25}F liegen sehr hoch und lassen sich als Kopplung eines $d_{5/2}$ -Protons an einen > 3 MeV liegenden 2^+ in ^{24}O interpretieren

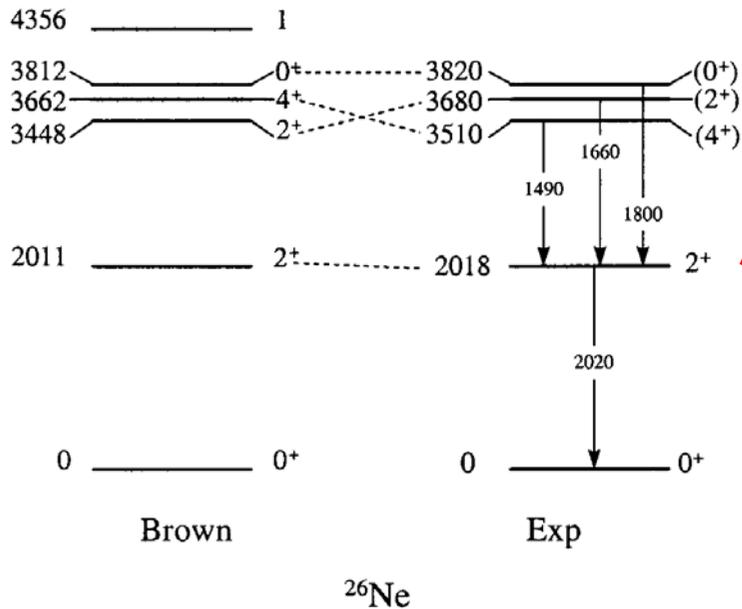
\rightarrow ^{24}O ist sphärischer Kern

Evolution der magischen Zahlen von N=16 nach N=20

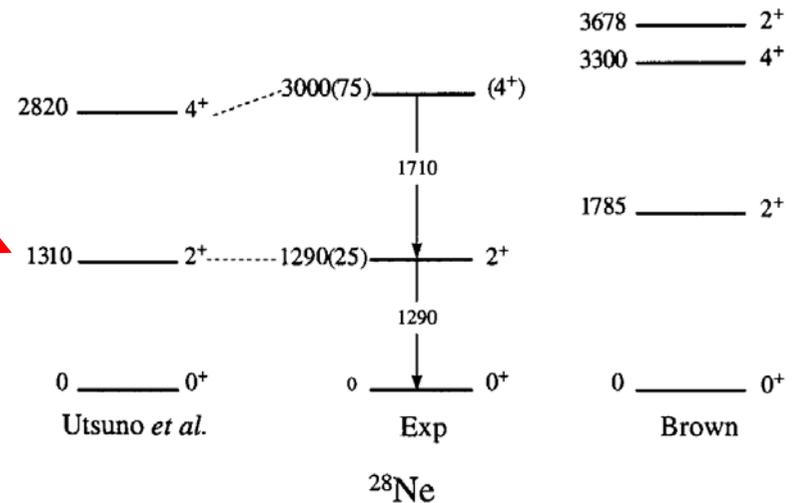


Außerhalb von N=16

N=16



N=18

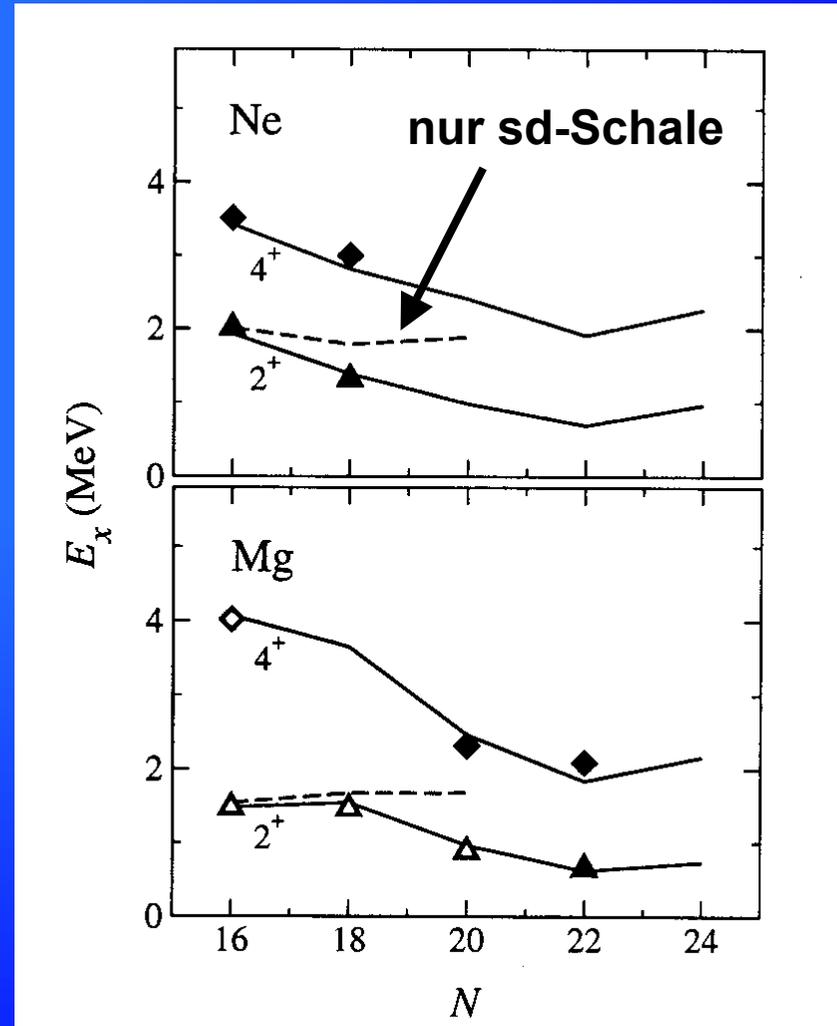
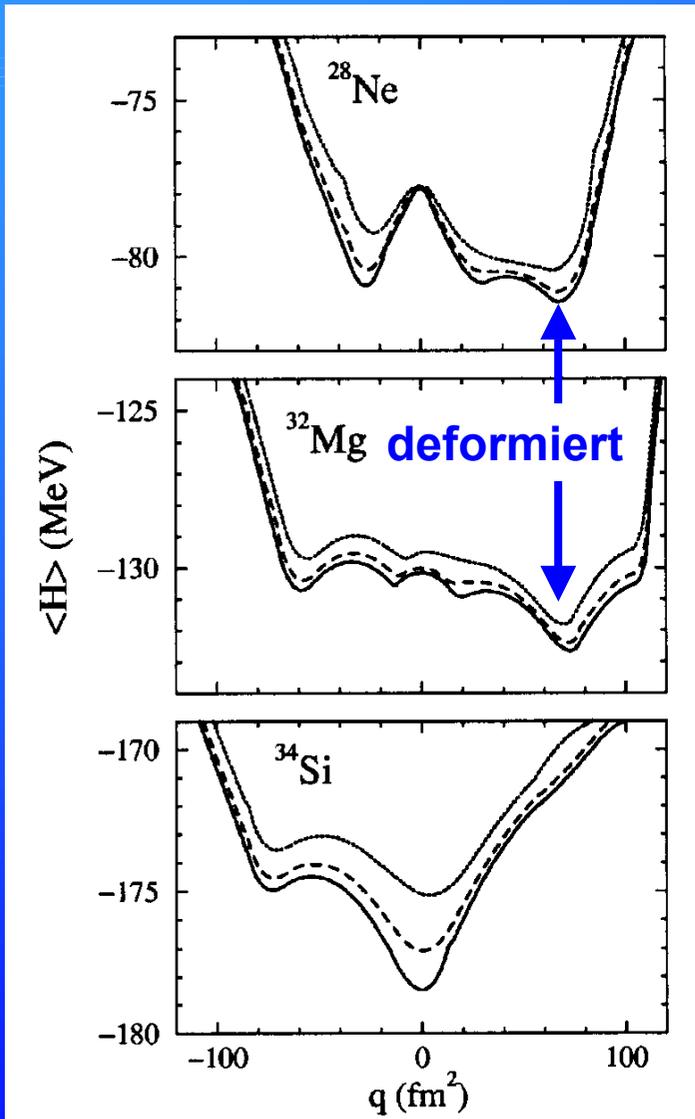


Ne (Z=10, also 2 Protonen außerhalb von Z=8)
 Die Energie des ersten 2^+ sinkt stark ab, wenn zwei Neutronen
 außerhalb von N=16 zugefügt werden

→ pn-Wechselwirkung treibt

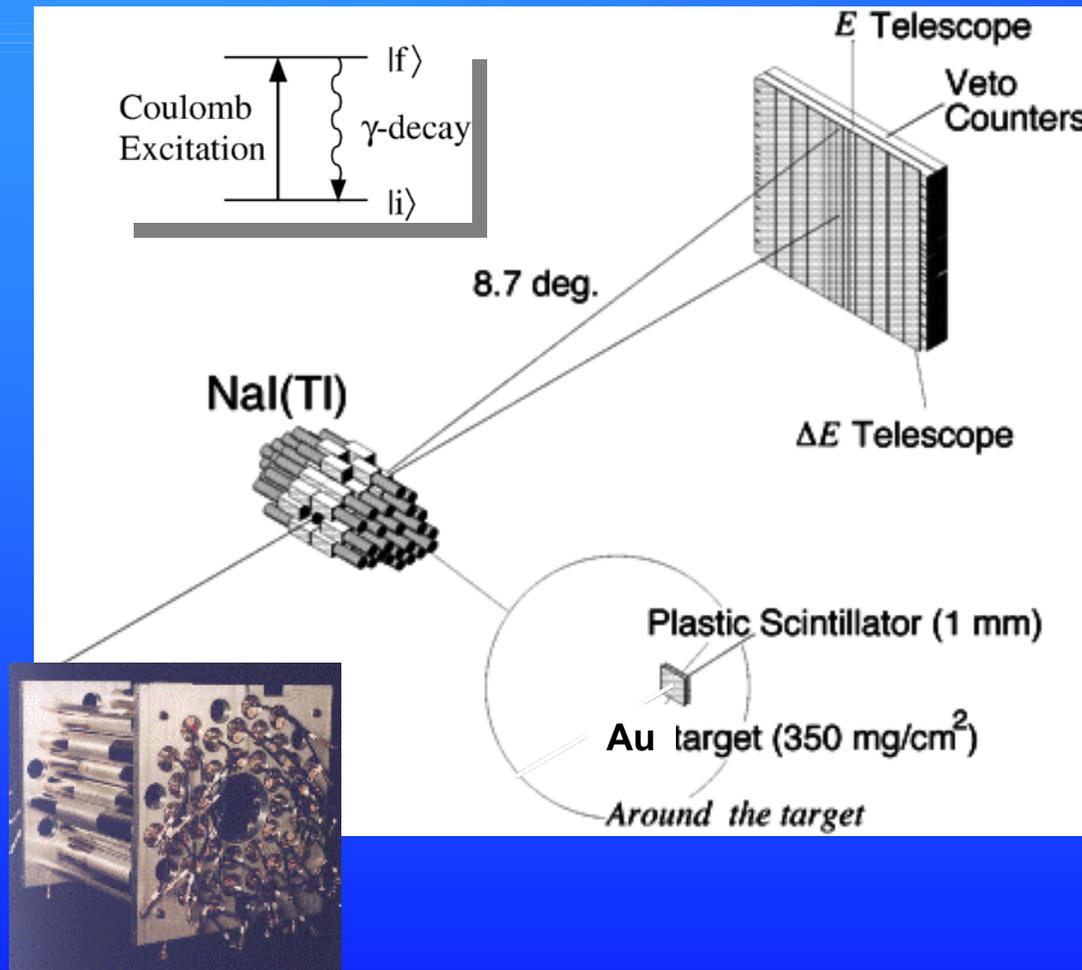
Deformation!!!

Deformation bei N=20

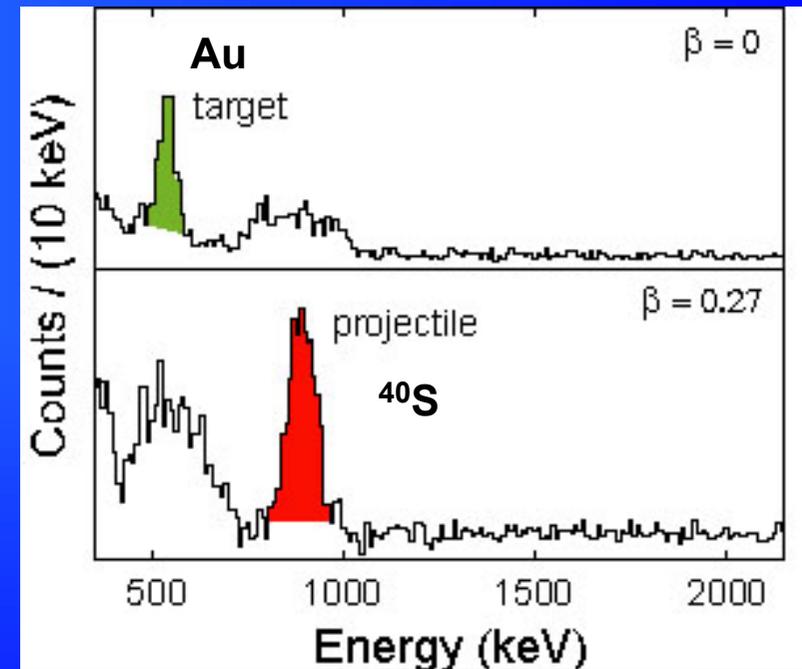


Nur sd-pf-Rechnung beschreibt Verhalten korrekt!!!

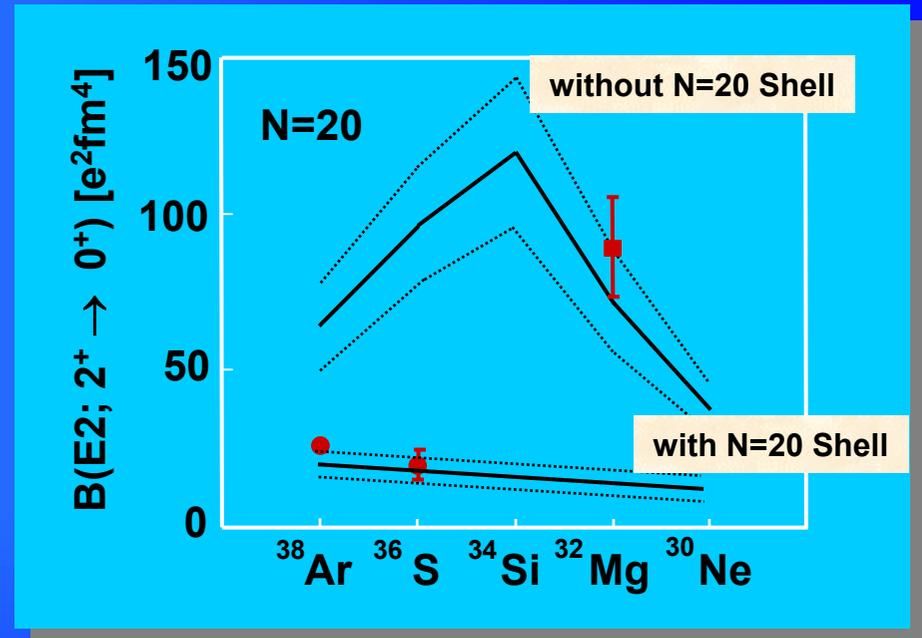
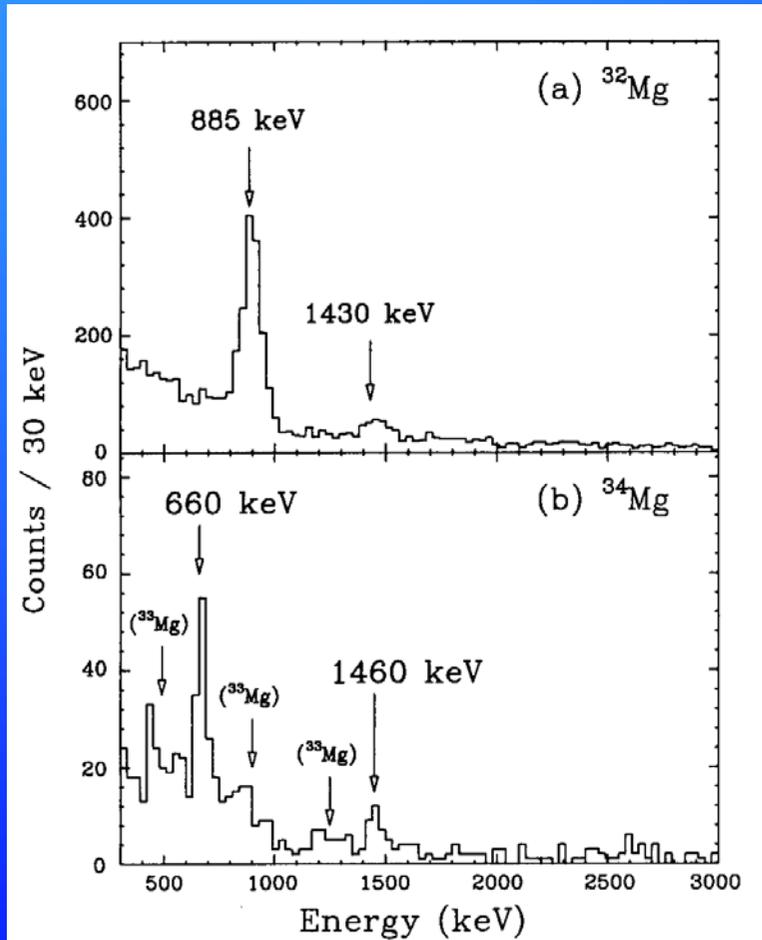
Intermediäre Coulombanregung



Doppler-Korrektur



Coulombanregung von Mg

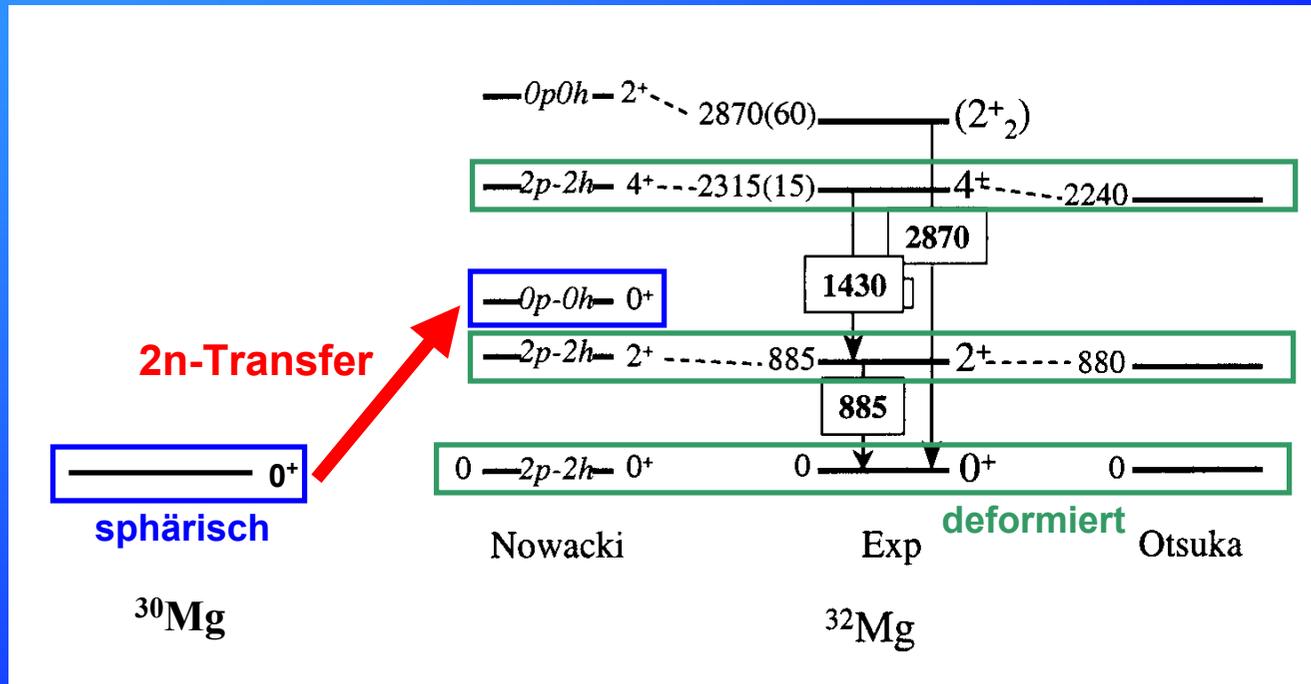


^{32}Mg :
 $E(4^+)/E(2^+) = 2.6$

^{34}Mg :
 $E(4^+)/E(2^+) = 3.2$

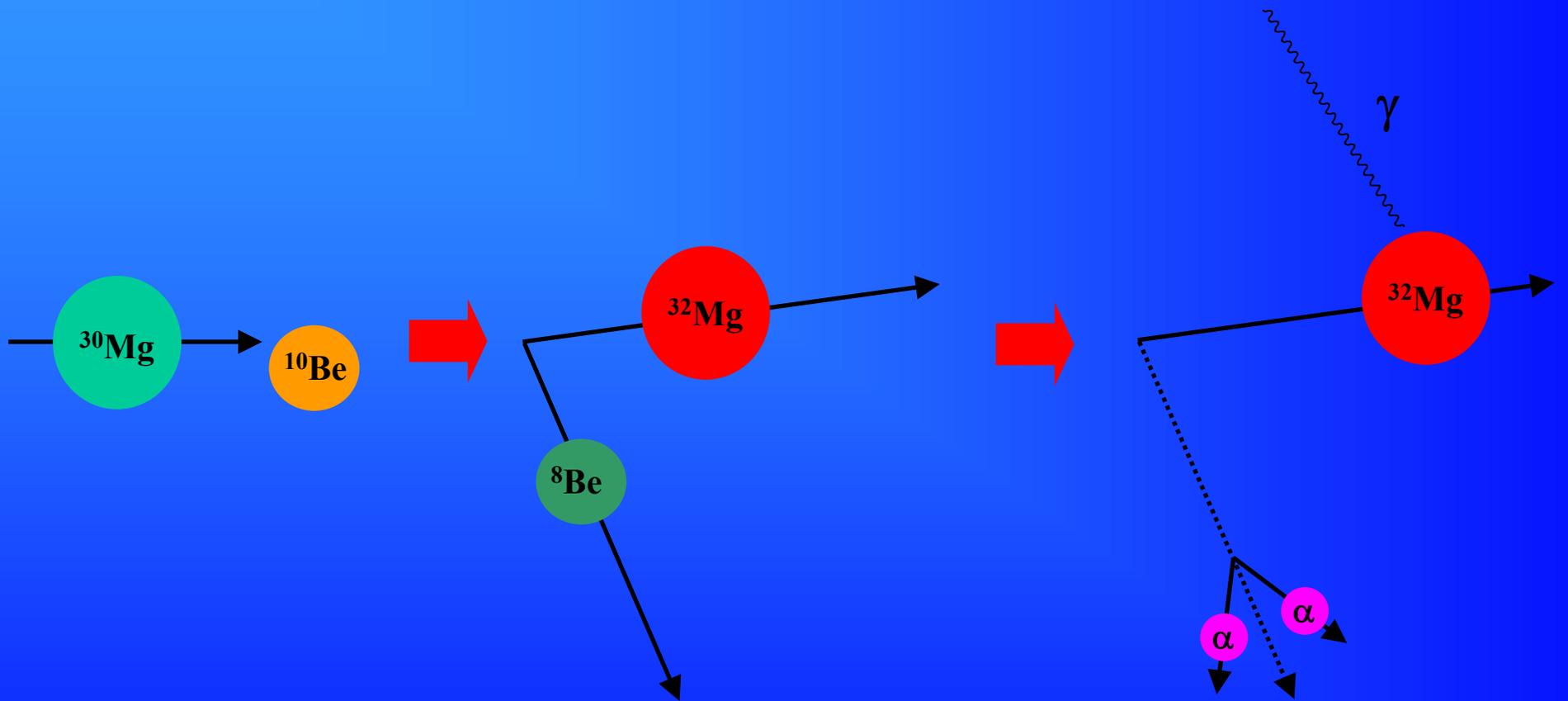
Rotator:
 $E(4^+)/E(2^+) = 10/3$

2n-Transfer in sphärischen 0^+ von ^{32}Mg (1)



Nukleonentransfer findet bevorzugt in Zustände gleicher Form statt

2n-Transfer in sphärischen 0^+ von ^{32}Mg (2)



2n-Transfer in sphärischen 0^+ von ^{32}Mg (3)

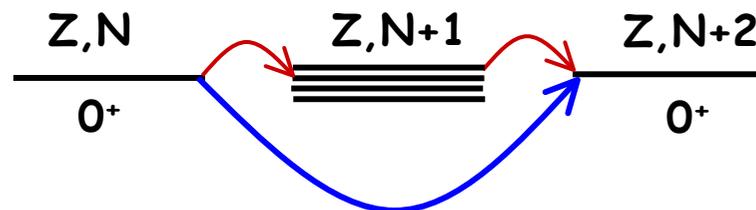
Einteilchentransfer

- Einteilchenenergien
- Quantenzahlen (Bahndrehimpuls L , totaler Drehimpuls $J=L+S$, Parität)
- Spektroskopische Faktoren

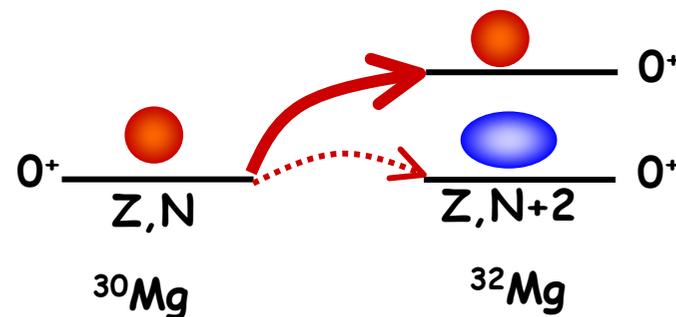


Paartransfer

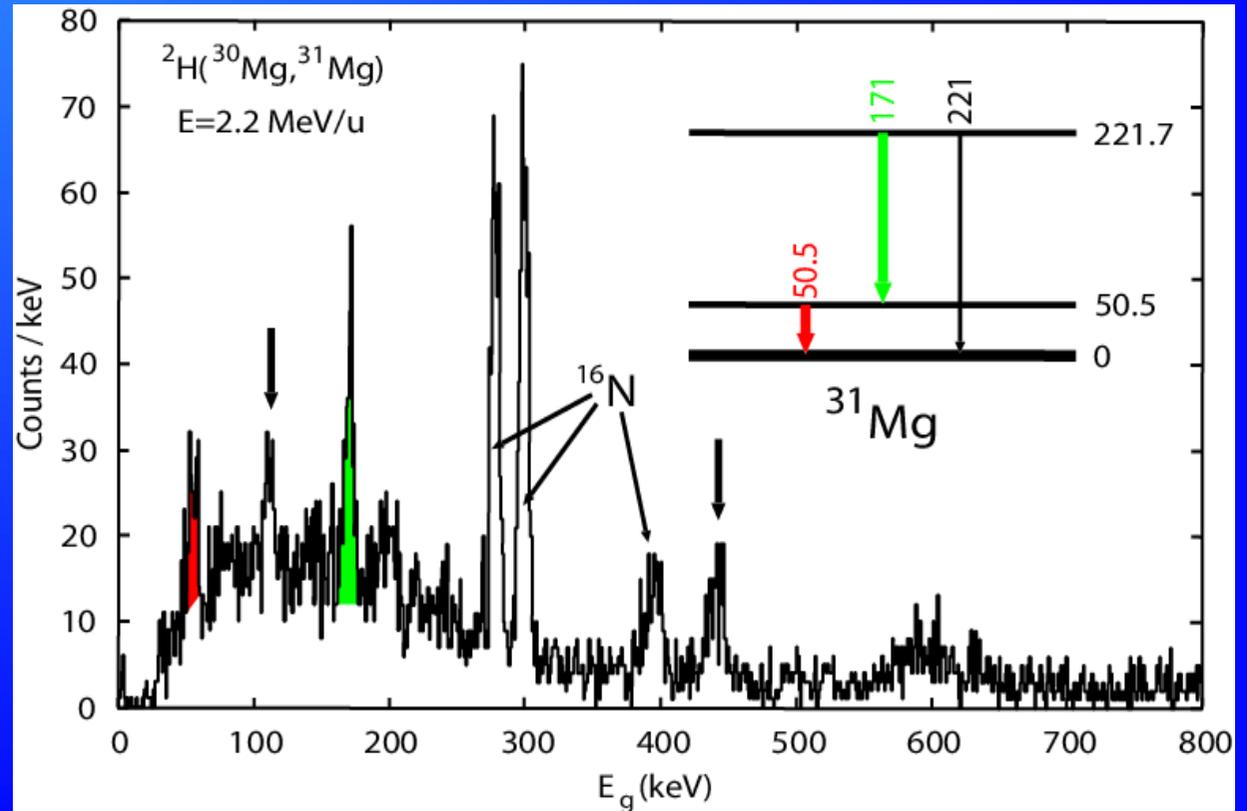
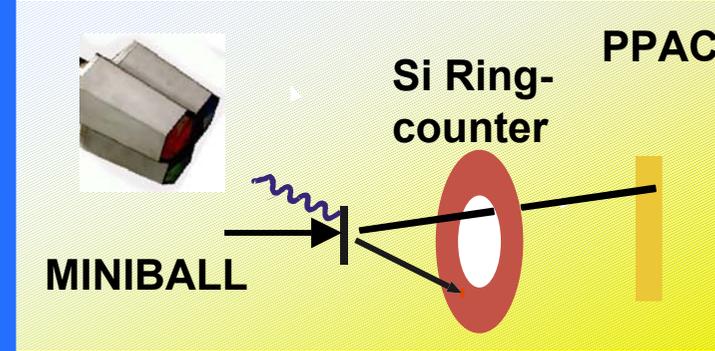
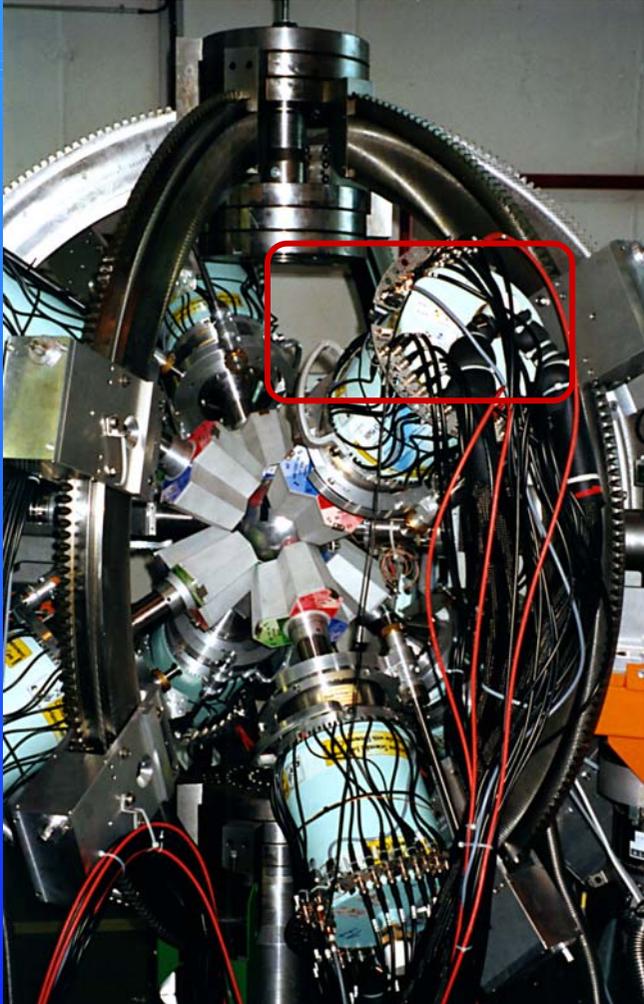
- Spektroskopische Faktoren
- **sequentieller** und **simultaner** Transfer



- Paarungskorrelationen
- Formkoexistenz

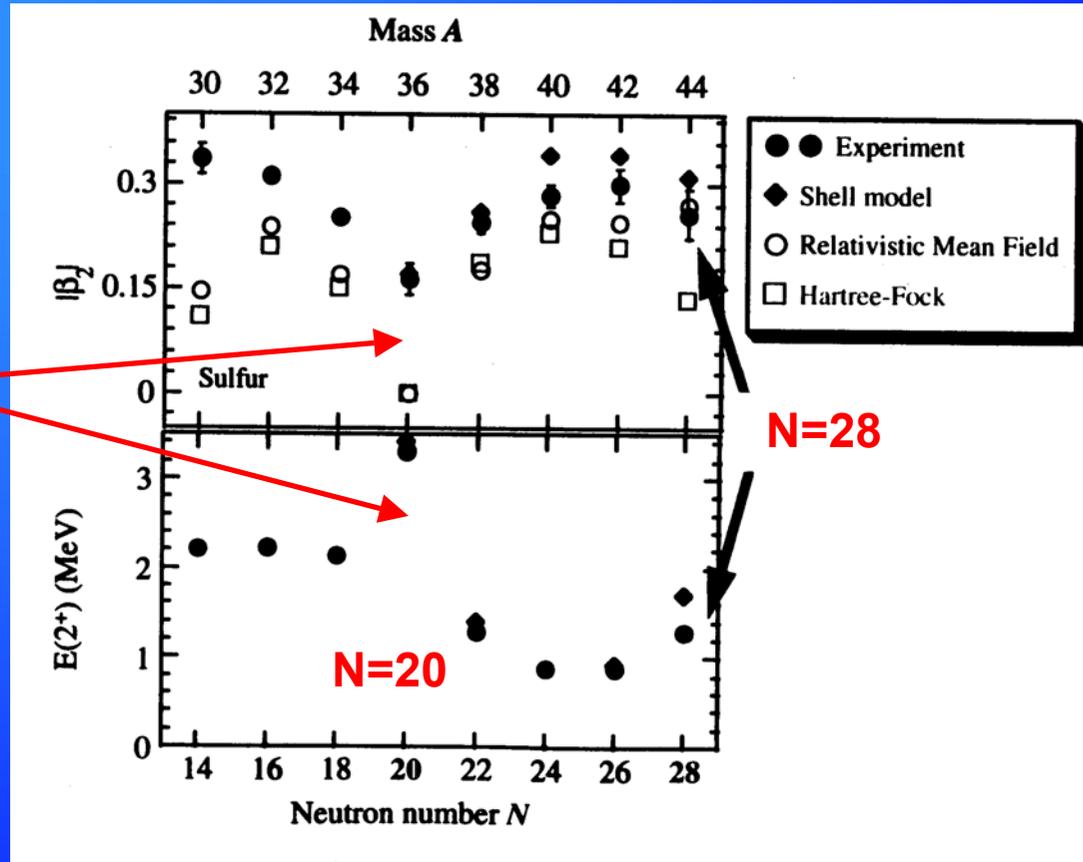


γ -Spektroskopie an REX-ISOLDE mit MINIBALL



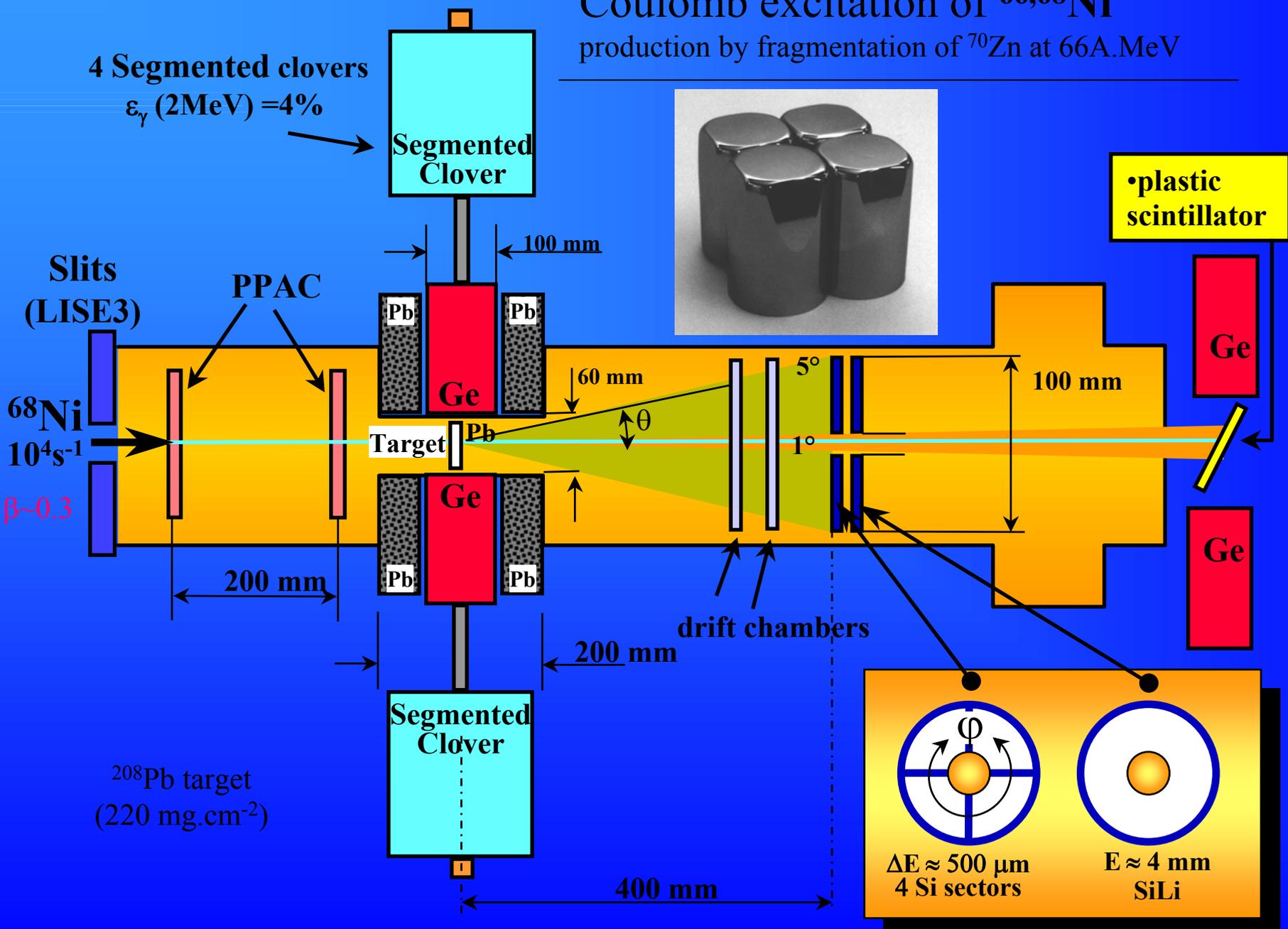
Schwefel-Isotope

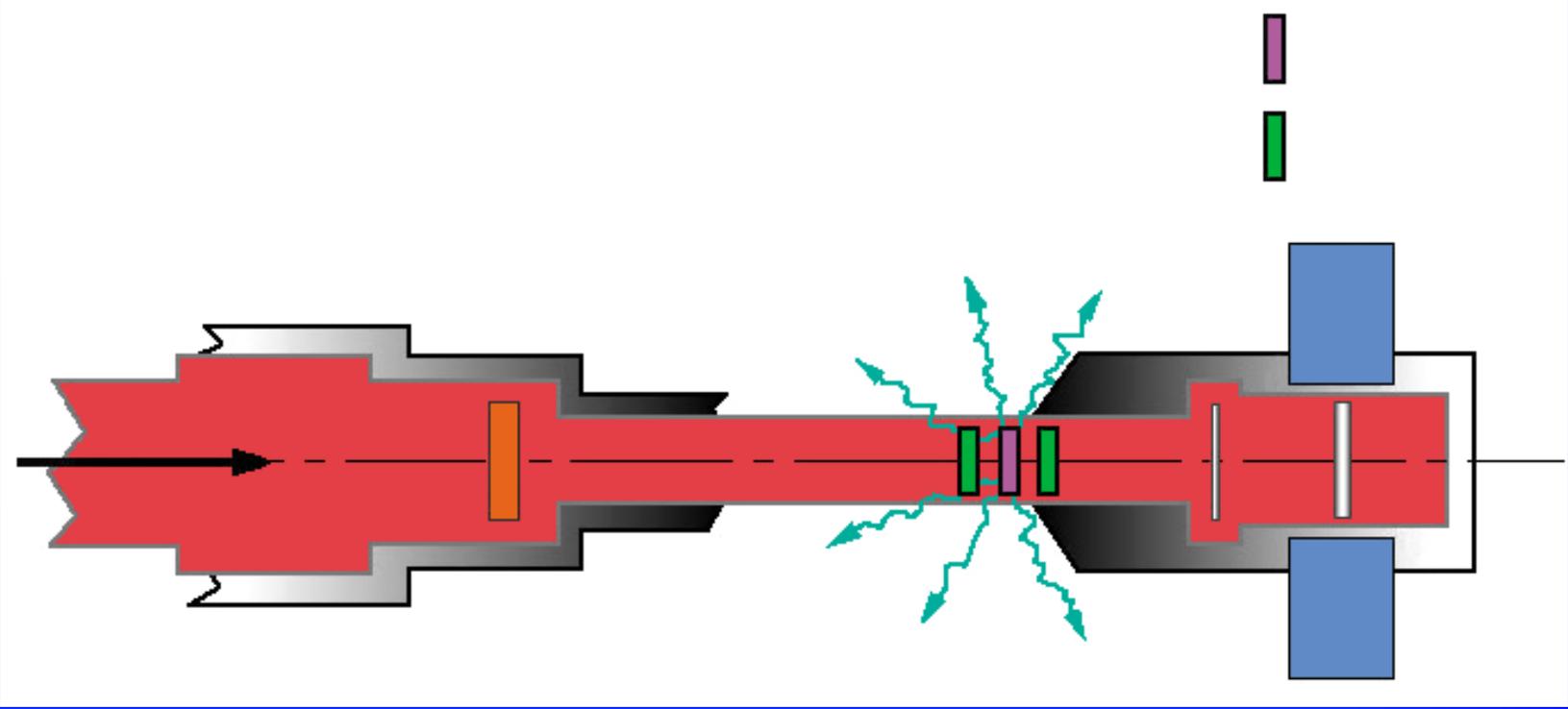
Kleine Deformation
und hohe $E(2^+)$
bei $N=20$



Offenbar ist der Schalenabschluß bei $N=28$ „aufgeweicht“

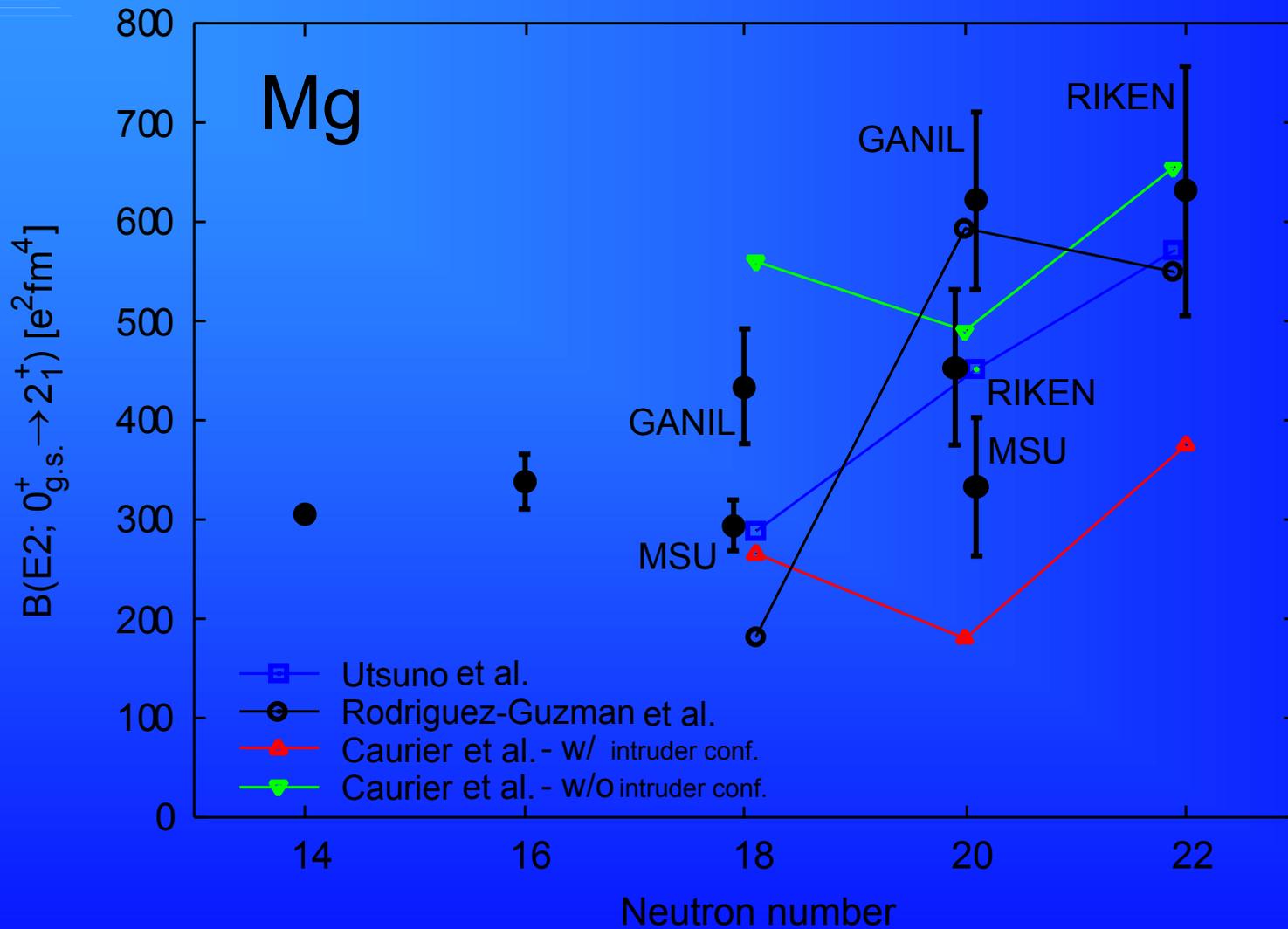
Coulomb excitation of $^{66,68}\text{Ni}$ production by fragmentation of ^{70}Zn at 66A.MeV





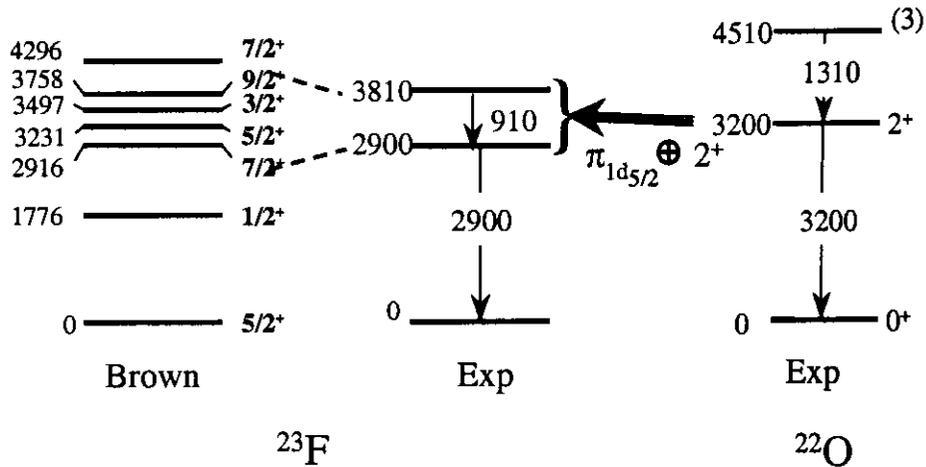


B(E2)-Werte in Mg



Ergebnisse 2 (N=16)

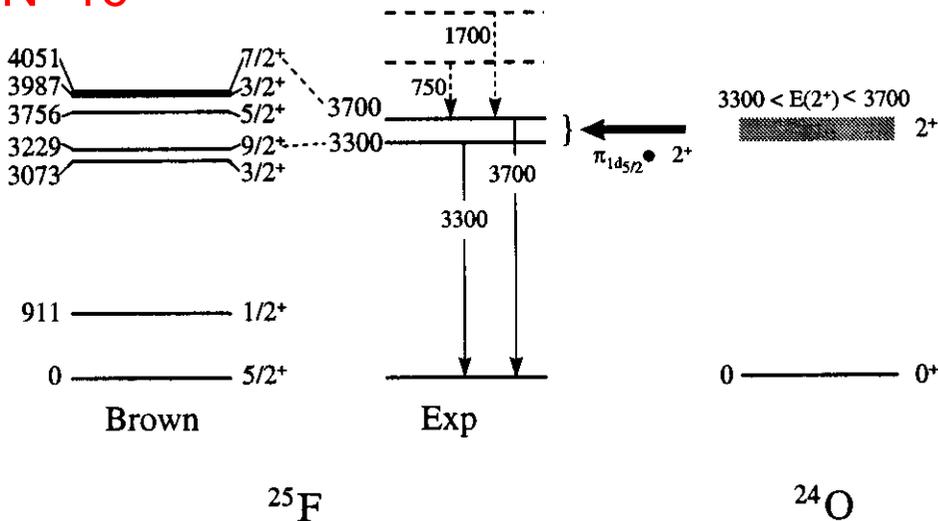
N=14



- $E(2^+)$ hoch
- Zustände in $^{23,25}\text{F}$ lassen sich „weak coupling“ eines Neutrons an $^{22,24}\text{O}$ -Kern interpretieren

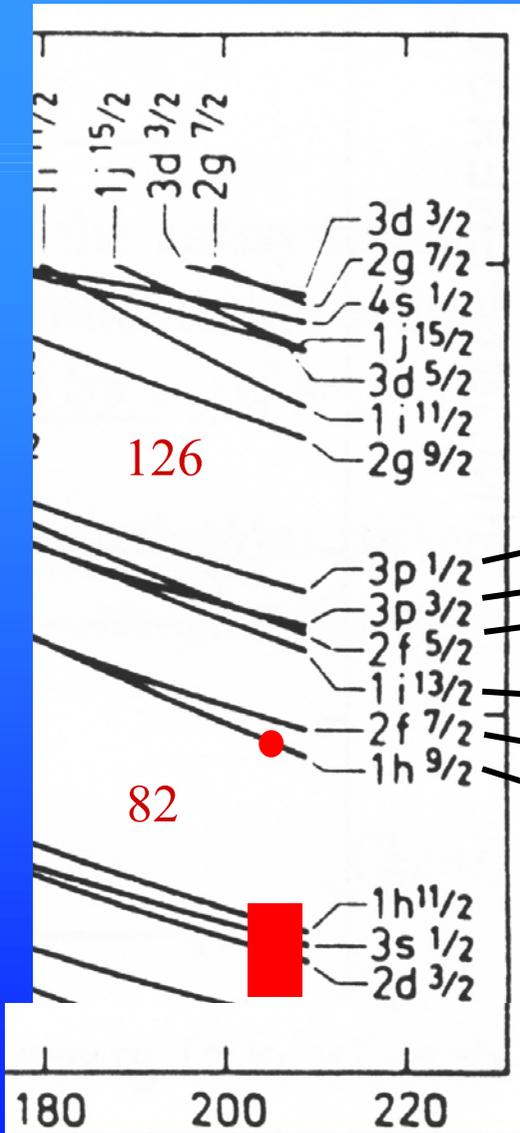
→ $^{22,24}\text{O}$ sind sphärische Kerne

N=16



Restwechselwirkung 2

Angeregte Zustände in Schalenmodell Kernen

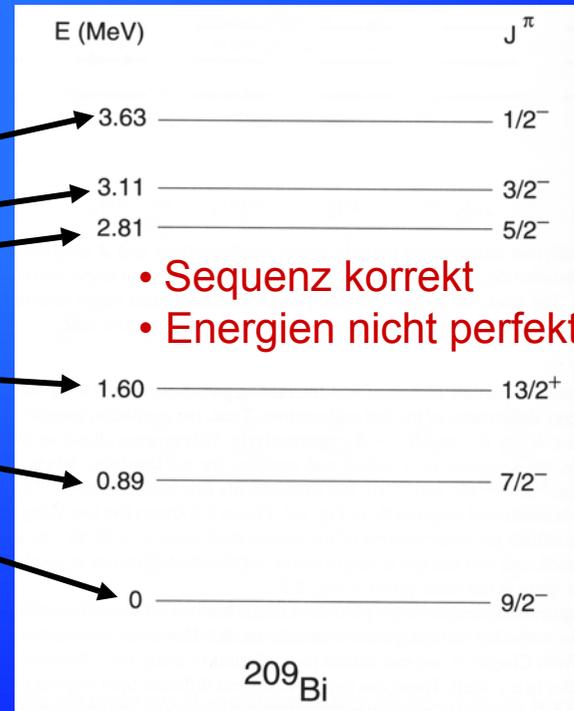


0 MeV

126

82

- 10 MeV



- Sequenz korrekt
- Energien nicht perfekt

- keine Restwechselwirkung
- keine Coulombwechselwirkung

γ -Spektroskopie nach tiefinelastischem Nukleonentransfer

