

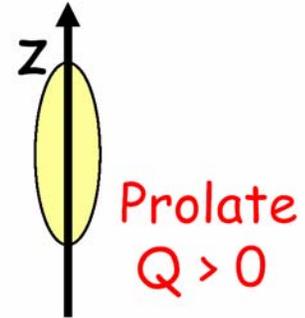
Kernkräfte und Kernmodelle:

- s-Wellen Streuung



Eigenschaften des Deuteron

Bindungsenergie:	$B = 2.23 \text{ MeV}$
Spin, Parität:	$J^P = 1^+$
Mag. Moment:	$\mu = +0.857 \mu_N$
Quadrupolmoment:	$Q = +2.82 \times 10^{-31} \text{ m}^2$
Radius:	$R = 2.1 \text{ fm}$



Deuteron besteht im wesentlichen aus dem 3S_1 -Zustand:

$$^3S_1 (l=0, S=1 \uparrow\uparrow) : \mu = \mu_p + \mu_n = 0.88 \mu_N$$

$$^1S_0 (l=0, S=0 \uparrow\downarrow) : \mu = \mu_p - \mu_n = 4.71 \mu_N$$

Warum gibt es keinen 1S_0 -Zustand?

Warum existiert das Di-Proton und das Di-Neutron nicht?

Zusammenfassung

Eigenschaften des Deuterons:

- Tiefe des Nukleonenpotenzials

$V_0 \sim 50 \text{ MeV}$ für Kernradius $R_0 = 1,4 \text{ fm}$.

- Kernkräfte sind spinabhängig.

- Nicht-zentraler, Tensorterm im zwei Nukleonenpotential

Vorläufiges Kernpotential:

$$V = V_C(r) + V_S(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) + V_T(\vec{r}, \vec{s}) + \dots$$

central

spin

tensor

- Deuteron: - nur eine gebundener Zustand, keine angeregten Zustände.
- Nicht genügend Information um Parameter des Potentials zu bestimmen
- Kein Zugang zu $l \neq 0$ Zustand.

Rechteckpotential ungebundene Teilchen

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dr^2} + (V(r) - E)u = 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{m_n \cdot m_p}{m_n + m_p} \approx \frac{m_p}{2} \equiv \frac{m}{2}$$

$$u(r) = r\psi(r)$$

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \psi(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} (V_0 - E)u = 0 \quad (r < R_0)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} E u = 0 \quad (r > R_0)$$

Lösungsansatz: $u(r) = \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}$

für $r < R_0$ (i innen) ist wegen endlicher Lösung im Inneren

$$\alpha_i = -\beta_i$$

$$u_i(r) = A \cdot \sin k_i r \quad \text{mit} \quad k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(V_0 + E)}$$

für $r > R_0$ (a aussen)

$$u_a(r) = C' \sin k_a r + D' \cos k_a r \quad \text{mit} \quad k_a = \frac{1}{\hbar} \sqrt{mE} \quad \text{oder}$$

$$u_a(r) = C \sin(k_a r + \delta) \quad \text{mit} \quad C' = C \cos \delta \quad \text{und} \quad D' = C \sin \delta$$

Rechteckpotential ungebundene Teilchen

Stetigkeitsbedingung für $r = R_0$

$$u_i(R_0) = u_a(R_0) \quad u'_i(R_0) = u'_a(R_0)$$

$$A \cdot \sin k_i R_0 = C \cdot \sin(k_a R + \delta)$$

$$k_i A \cdot \cos k_i R_0 = k_a C \cdot \cos(k_a R + \delta)$$

Division :

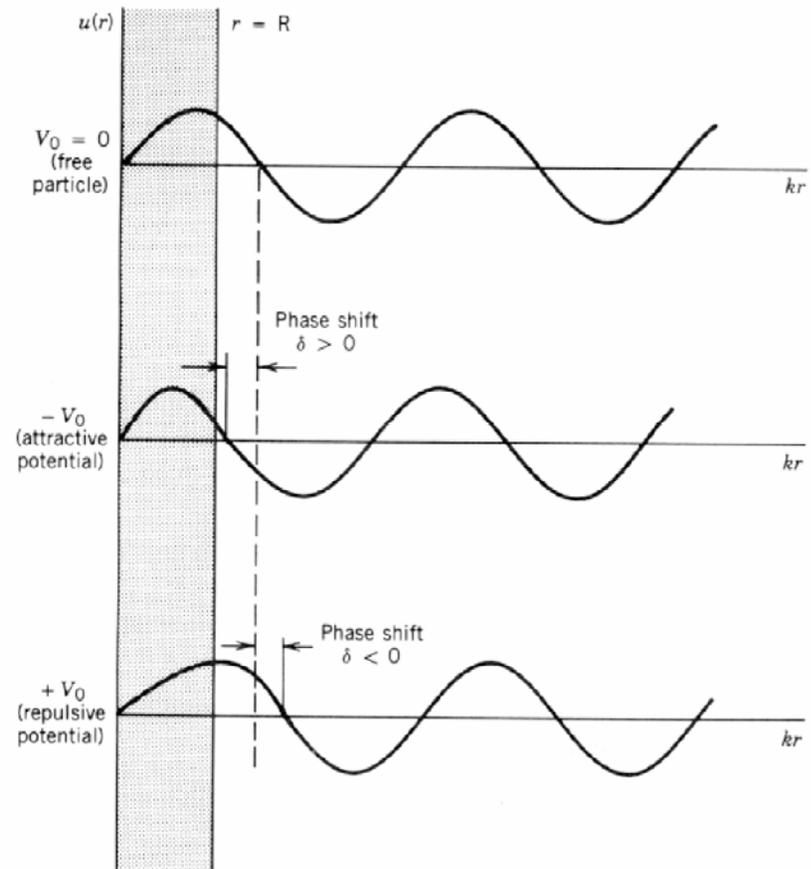
$$k_i \cdot \cot k_i R = k_a \cdot \cot(k_a R + \delta)$$

Phasenverschiebung δ

Knoten der Wellenfunktion werden von:

-attraktivem Potential zum Zentrum
gezogen, positive Phasenverschiebung

-repulsivem Potential vom Zentrum
abgestoßen, negative Phasenverschiebung



Rechteckpotential ungebundene Teilchen

Stetigkeitsbedingung für $r = R_0$

$$u_i(R_0) = u_a(R_0) \quad u_i'(R_0) = u_a'(R_0)$$

$$A \cdot \sin k_i R_0 = C \cdot \sin(k_a R_0 + \delta)$$

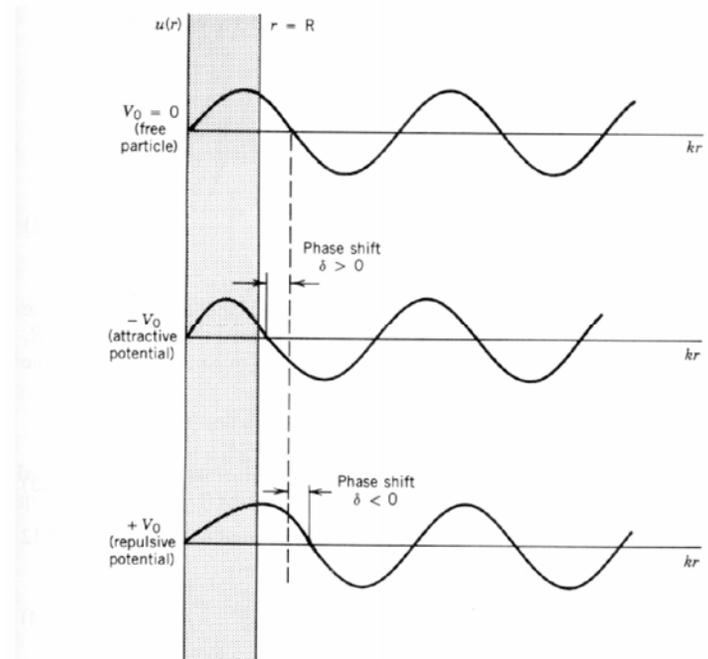
$$k_i A \cdot \cos k_i R_0 = k_a C \cdot \cos(k_a R_0 + \delta)$$

Division :

$$k_i \cdot \cot k_i R_0 = k_a \cdot \cot(k_a R_0 + \delta)$$

Auflösen nach Phasenverschiebung :

$$\delta = -k_a R_0 + \arctan \left\{ \frac{k_a}{k_i} \tan k_i R_0 \right\}$$



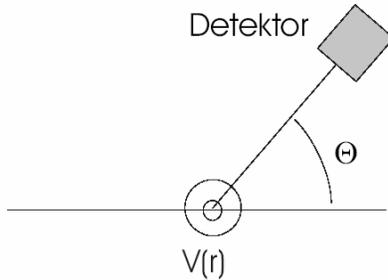
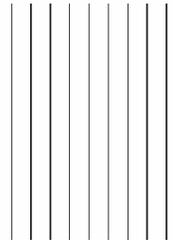
Phasenverschiebung δ

Ist eindeutig bestimmt durch

- Radius R_0
- Teilchenenergie E
- Potentialtiefe V_0

$$\text{Energien: } k_a = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}$$

Streutheorie - Kurze Erinnerung



Einlaufende ebene Welle $\vec{k} = (0, 0, k)$

$$\Psi_{\text{in}}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} = Ae^{ikz}$$

Auslaufende Kugelwelle

$$\Psi_{\text{str}}(\vec{r}) = A f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty$$

Gesamtwellenfunktion

$$\Psi(\vec{r}) = A \left(e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

Stromdichte der Welle

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2\mu i} \{ \Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi)^* \Psi \}$$

$$\dot{j}_{\text{in}} = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\hbar k}{\mu} |A|^2$$

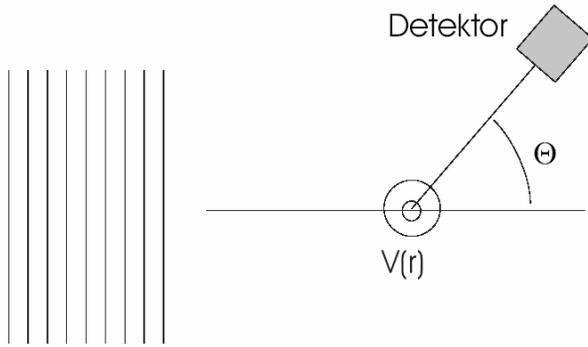
$$\dot{j}_{\text{str}} = \frac{\hbar k}{\mu} |A|^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2} = v |A|^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{\dot{j}_{\text{str}} r^2 d\Omega}{\dot{j}_{\text{in}}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2$$

Ansatz mit einlaufender ebener Welle und auslaufender Kugelwelle

Verbindung zu Streutheorie



Einlaufende Welle

$$\Psi_{in}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} = Ae^{ikz}$$

In Kugelwellen für $l = 0$

$$\Psi_{in}(\vec{r}) = \frac{A}{2ik} \left[\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

Gesamtwellenfunktion nach Streuung

Unterschied ist eine Phasenänderung

β des auslaufenden Teilchens

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{A}{2ik} \left[\frac{e^{i(kr+\beta)}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

Beziehung zwischen β und δ :

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} = \frac{C}{r} \sin(kr + \delta)$$

$$= \frac{C}{r} \frac{e^{i(kr+\delta)} - e^{-i(kr-\delta)}}{2i}$$

$$= \frac{C}{2i} e^{-i\delta} \left[\frac{e^{i(kr+2\delta)}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right]$$

d.h. $\beta = 2\delta$ und $A = kCe^{-i\delta}$

Wellenfunktion des gestreuten Teilchens :

$$\Psi_{str}(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) - \Psi_{in}(\vec{r})$$
$$= \frac{A}{2ik} (e^{2i\delta} - 1) \frac{e^{ikr}}{r}$$

**Ansatz mit einlaufender
und auslaufender Kugelwelle**

Verbindung zu Streutheorie

Stromdichte der gesteuerten Welle

$$j_{st} = \frac{\hbar}{2mi} \left\{ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \psi \right\}$$

$$= \frac{\hbar |A|^2}{mkr^2} \sin^2 \delta$$

$$j_{in} = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{j_{str} r^2 d\Omega}{j_{in}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta}{k^2}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2}$$

Einige Folgerungen:

- $d\sigma/d\Omega$ ist i.A. winkelabhängig.
- Für den Fall $l=0$ ist $d\sigma/d\Omega$ const.
- Die Phasenverschiebung für $l=0$ Streuung ist direkt mit dem WQ verknüpft.
- Mit dem Ergebnis des einfachen Rechteckmodells kann WQ bestimmt werden.

Nächster Schritt: Vergleich Experiment mit theoretischen Erwartungen.

Wirkungsquerschnitt für s-Wellen bei np-Streuung

Streuung am Rechteckpotential:

$$k_a \cdot \cot(k_a R + \delta) = k_i \cdot \cot k_i R$$

setze $-\alpha = k_i \cdot \cot k_i R$, Trigonometrie

$$\sin^2 \delta = \frac{\cos k_a R + \left(\frac{\alpha}{k_a}\right) \sin k_a R}{1 + \alpha^2/k_a^2}$$

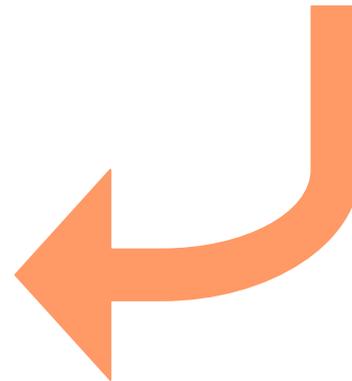
$$\sigma = \frac{4\pi}{k_a^2 + \alpha^2} \left(\cos k_a R + \left(\frac{\alpha}{k_a}\right) \sin k_a R \right)$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{j_{\text{str}} r^2 d\Omega}{j_{\text{in}}} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta}{k^2}$$

Totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2}$$



Wirkungsquerschnitt für s-Wellen np-Streuung

betrachte kleine Neutronenenergien

$$E \leq 10 \text{ KeV} \quad \text{und} \quad V_0 = 35 \text{ MeV}$$

$$k_i = \sqrt{2m(V_0 + E)/\hbar^2} \cong 0.92 \text{ fm}^{-1}$$

$$k_a = \sqrt{2mE/\hbar^2} \leq 0.016 \text{ fm}^{-1}$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_a^2 + \alpha^2} (\cos k_a R + (\alpha/k_a) \sin k_a R)$$

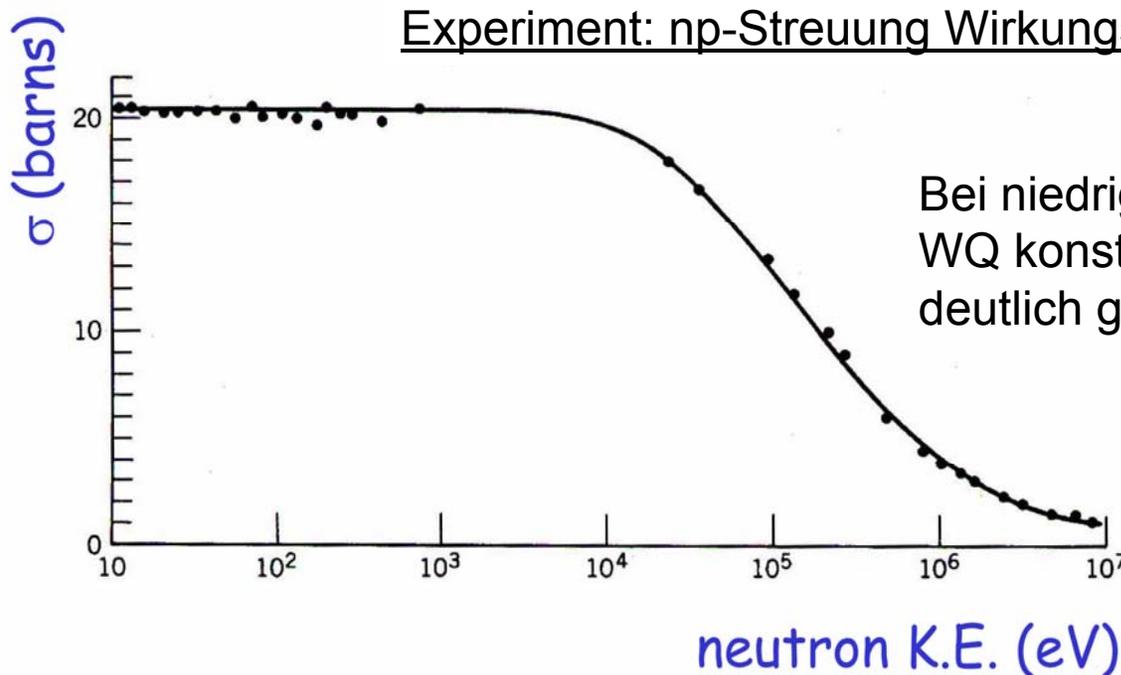
Entwicklung von \cos , \sin mit

$$R \approx 2 \text{ fm} \Rightarrow \alpha \approx 0.2 \text{ fm}^{-1}$$

$$k_a^2 \ll \alpha^2 \quad \text{und} \quad k_a R \ll 1$$

Abschätzung:

$$\sigma = \frac{4\pi}{\alpha^2} (1 + \alpha R) = 4.6 \text{ b}$$



Drehimpulsabhängigkeit der np-Streuung

Für die Erklärung der Diskrepanz muß die relative Spinorientierung der beiden Nukleonen berücksichtigt werden.

Der WQ wurde mit den Werten des Deuterons abgeschätzt, das mit seinem Gesamtspin von $S=1$ nur einen gebundenen Triplettzustand bildet.

Singulett: $S=0$ 1S_0 $\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow$
Triplett (Deuteron): $S=1$ 3S_1 $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ $\sigma_t = 4.6 \text{ b}$

Bei der Streuung können jedoch beide Spinorientierungen auftreten. Die relativen Anteile zum GesamtWQ ergeben sich zu:

$$\sigma = 3/4\sigma_t + 1/4 \sigma_s$$

Diese bedeutet: aus dem berechneten WQ für $\sigma_t = 4.6 \text{ b}$ und dem gemessenen WQ für $\sigma = 20.4 \text{ b}$ ergibt sich ein WQ für die Streuung im Singulettzustand zu

$$\sigma_s = 67.8 \text{ b.}$$

Eine enorme Differenz, die die Spinabhängigkeit der Kernkräfte demonstriert!

Streulänge

Eine wichtige Größe für die Analyse von Streuproblemen bei kleinen Energien ist die **Streulänge a** .

Definition der Streulänge: totaler Wirkungsquerschnitt bei verschwindender Energie der gestreuten Teilchen:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2$$

Die Streulänge definiert eine effektive Querschnittsfläche.

Information über die Stärke und Art des Streupotentials.

Obwohl die Streulänge die Dimension einer Länge hat, gibt sie keine Auskunft über die Reichweite des Potentials!

$$a = \pm \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{k} \quad \text{für } l = 0 \text{ Streuung gilt: } -\frac{1}{a} = k_a \cot \delta$$

Das Vorzeichen kann frei gewählt werden, üblicherweise negativ.

Positive Werte von a : gebundene Zustände

Negative Werte von a : ungebundene Zustände