

Kernmodelle:

- Schalenmodell



Zusammenfassung letzte Stunde: Fermigasmodell

Kerne im Grundzustand sind entartete Fermigasysteme aus Nukleonen, mit hoher Dichte ($0,17 \text{ Nukleonen/fm}^3$).

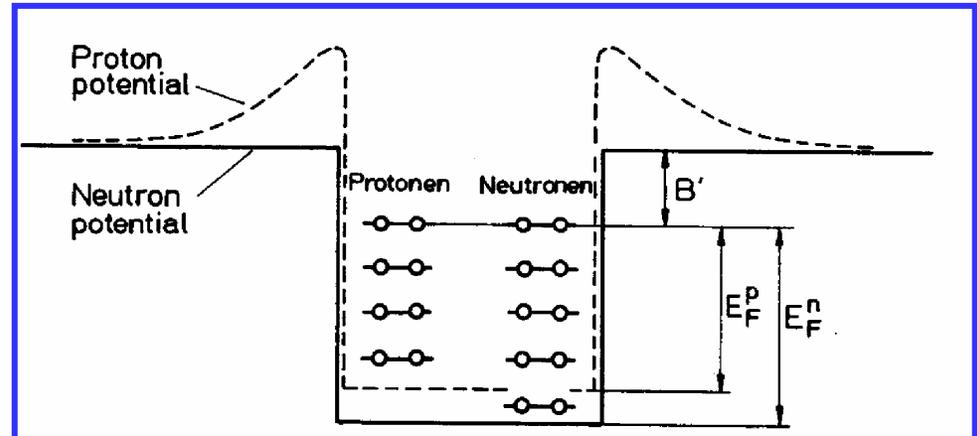
Die Kerndichte ist bestimmt durch den "hardcore" und die Reichweite der N-N Wechselwirkung.

Im Zusammenhang mit der hohen Dichte steht ein hoher Fermi-Impuls ($250 \text{ MeV}/c$), der Ausdruck hoher Beweglichkeit und schwacher Bindung ist.

$$\text{Fermi - Impuls : } p_F \cong p_F^p \cong p_F^n = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV} / c \quad \text{für } Z = N = \frac{A}{2}$$

$$\text{Fermi - Energie : } E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV}$$

$$\text{Potentialopf : } V_0 = E_F + B' \approx 40 \text{ MeV}$$



Die kinetische Energie des Nukleonengases ist wegen der geringen Bindungsenergie B' etwa gleich der Potentialtiefe analog zum freien Elektronengas in Metall.

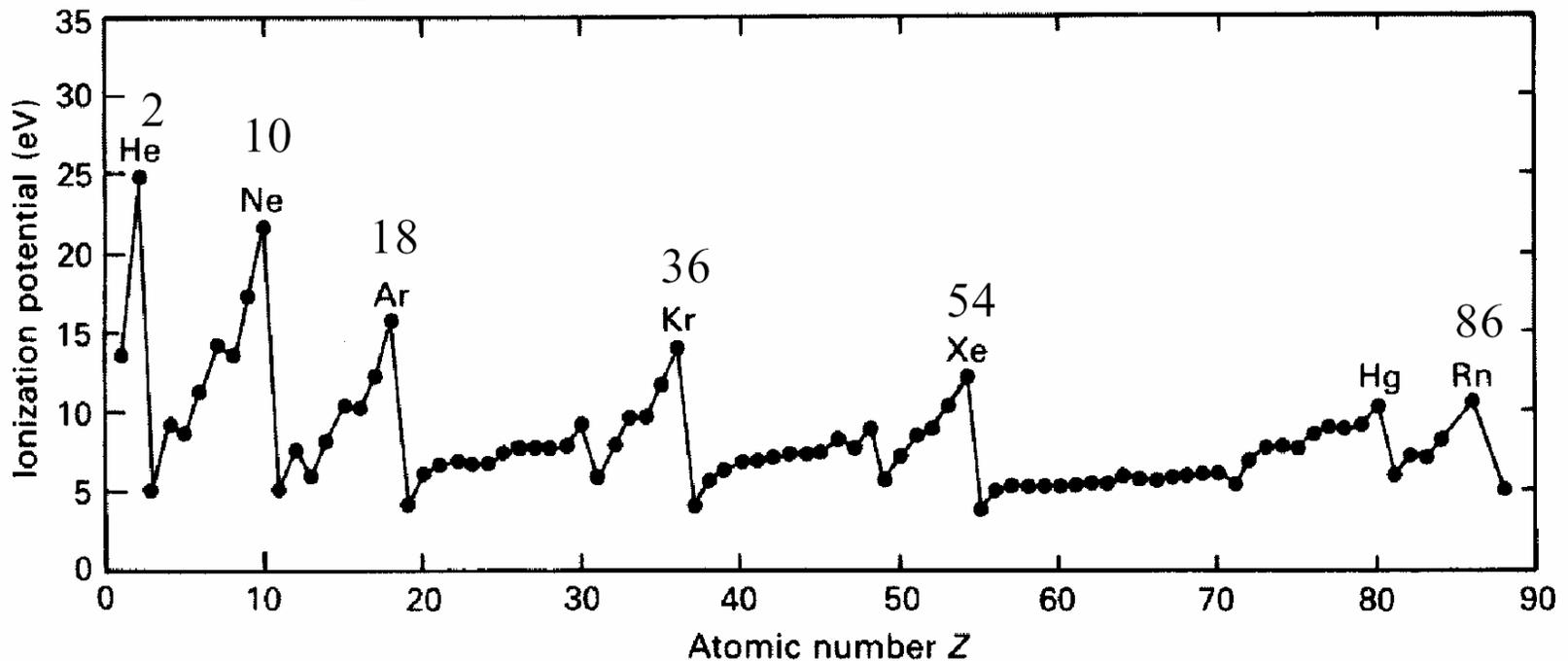
Schalenmodell

Tröpfchenmodell und Fermigasmodell sind phänomenologische Modelle mit beschränktem Anwendungsbereich. Sie werden an die Experimente angepasst (z.B. die Konstanten für die Terme in der Massenformel) und können viele weitere Beobachtungen nicht beschreiben:

- *Spin und Parität des Grundzustandes (und angeregter Kernniveaus)*
- *Magnetische Momente*
- *Ladungsverteilungen (Formfaktoren)*
- *Magische Zahlen: $Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$*

Schalenmodell

Atomphysik: Hohe Elektronbindungsenergie bei abgeschlossenen Schalen mit Ordnungszahlen $Z = 2, 10, 18, 36, 54, (80), 86$ (Edelgase)

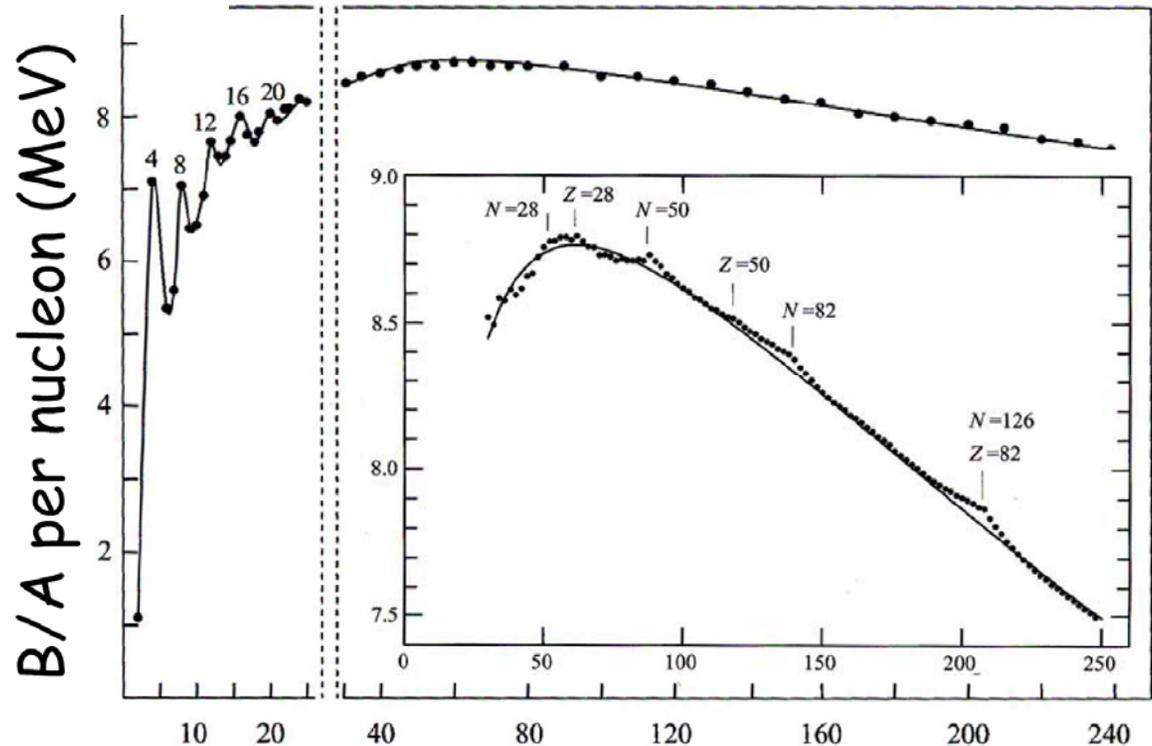


Magische Zahlen

Empirische Hinweise deuten auf eine Schalenstruktur des Atomkerns hin. Evidenz für die sogenannten magischen Zahlen: **2, 8, 20, 28, 50, 82, 126** ergibt sich aus:

- Kerne, bei denen die Neutronenzahl N oder die Protonenzahl Z eine magische Zahl ist, sind besonders stabil. Sie besitzen eine besonders hohe Separationsenergie für ein einzelnes Nukleon.

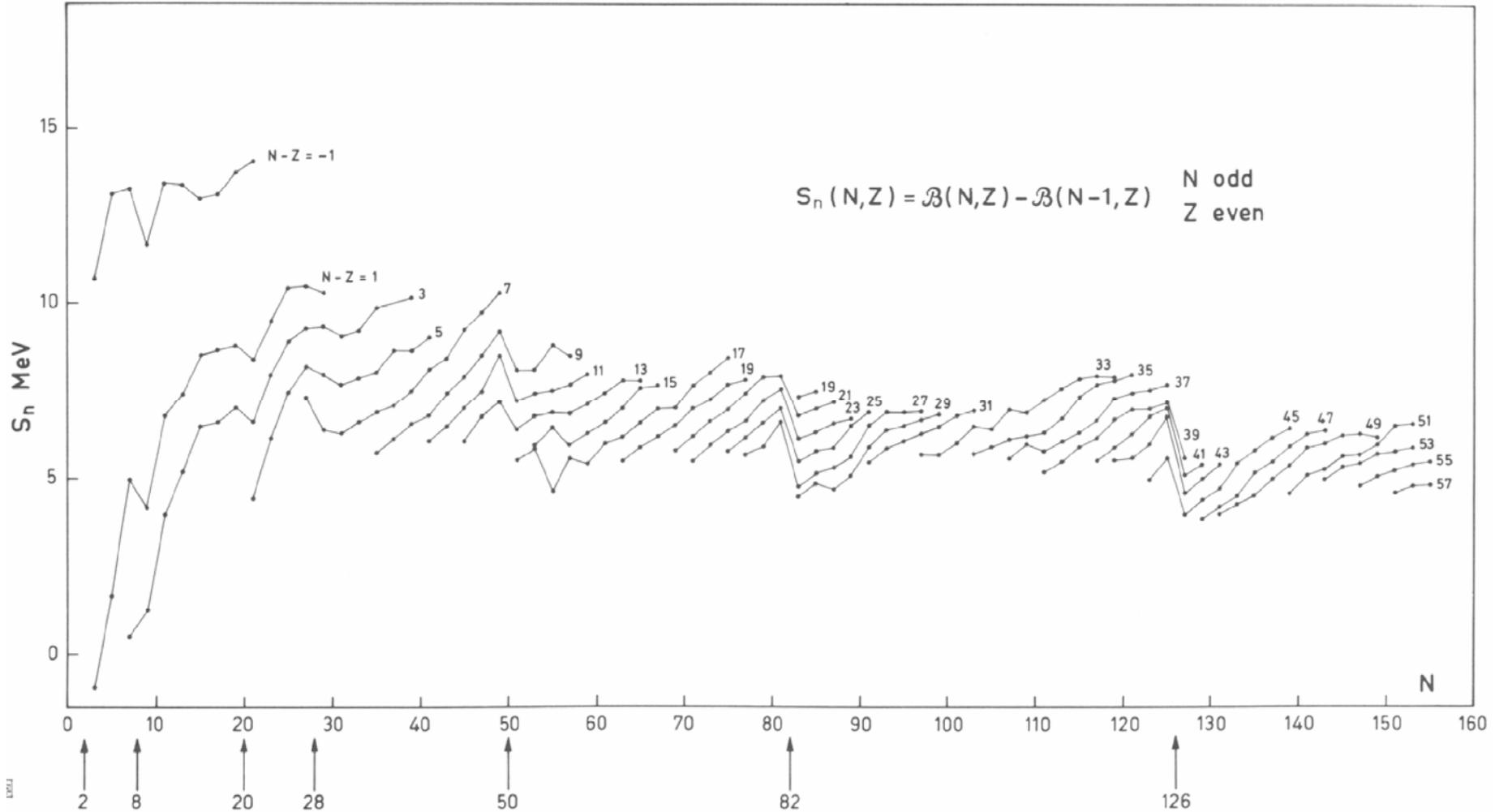
- Gleichzeitig ist die Separationsenergie für ein weiteres hinzugefügtes Nukleon wesentlich kleiner als durchschnittliche Sep. Energie



A

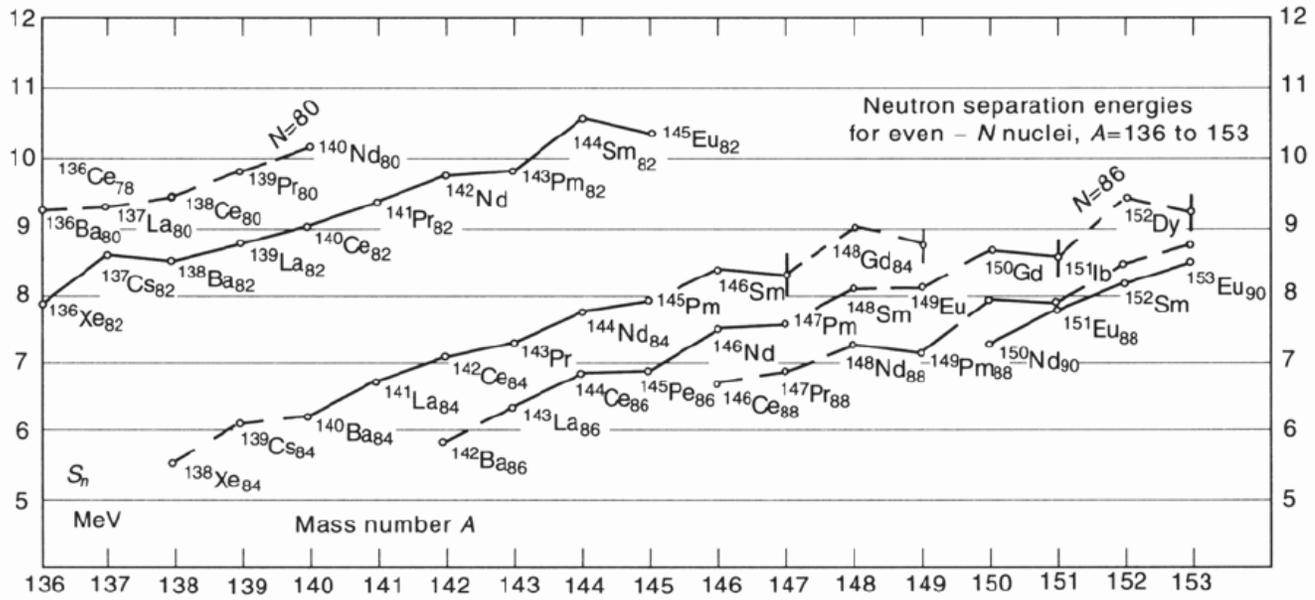
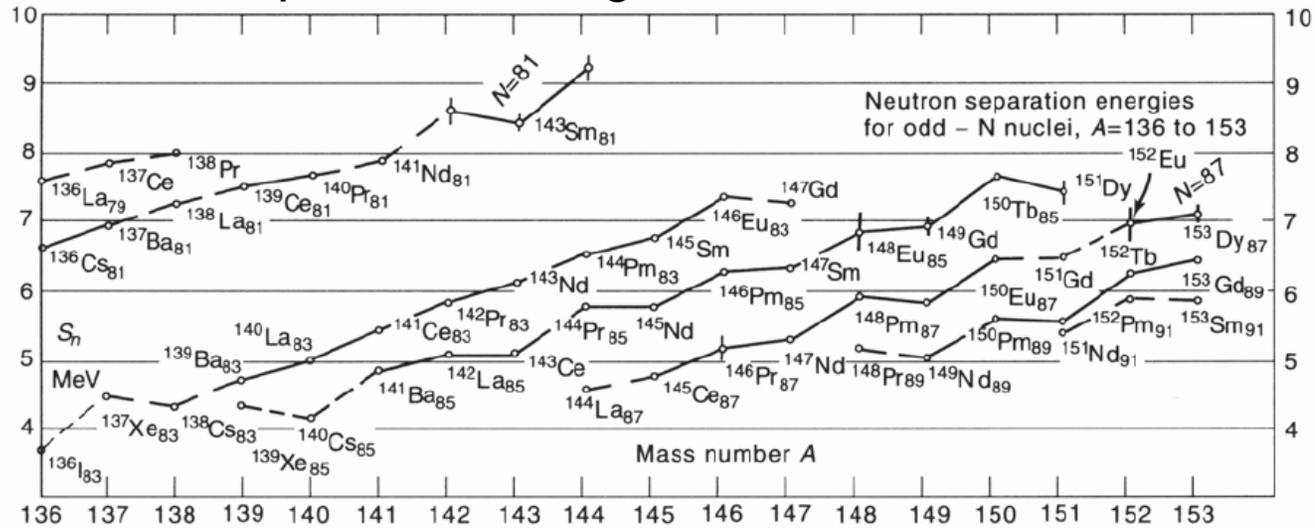
Weitere Evidenz für magische Zahlen

Neutronenseparationsenergie



Evidenz für magische Zahlen

- Neutronenseparationsenergie



Evidenz für magische Zahlen

- Hohe 2 Nukleonenseparationsenergie bei magischen Zahlen.

- Ist Z oder N eine magische Zahl, so gibt es besonders viele stabile Kerne mit dieser Protonen- bzw. Neutronenzahl.

z.B. 6 Kerne mit $N = 50$

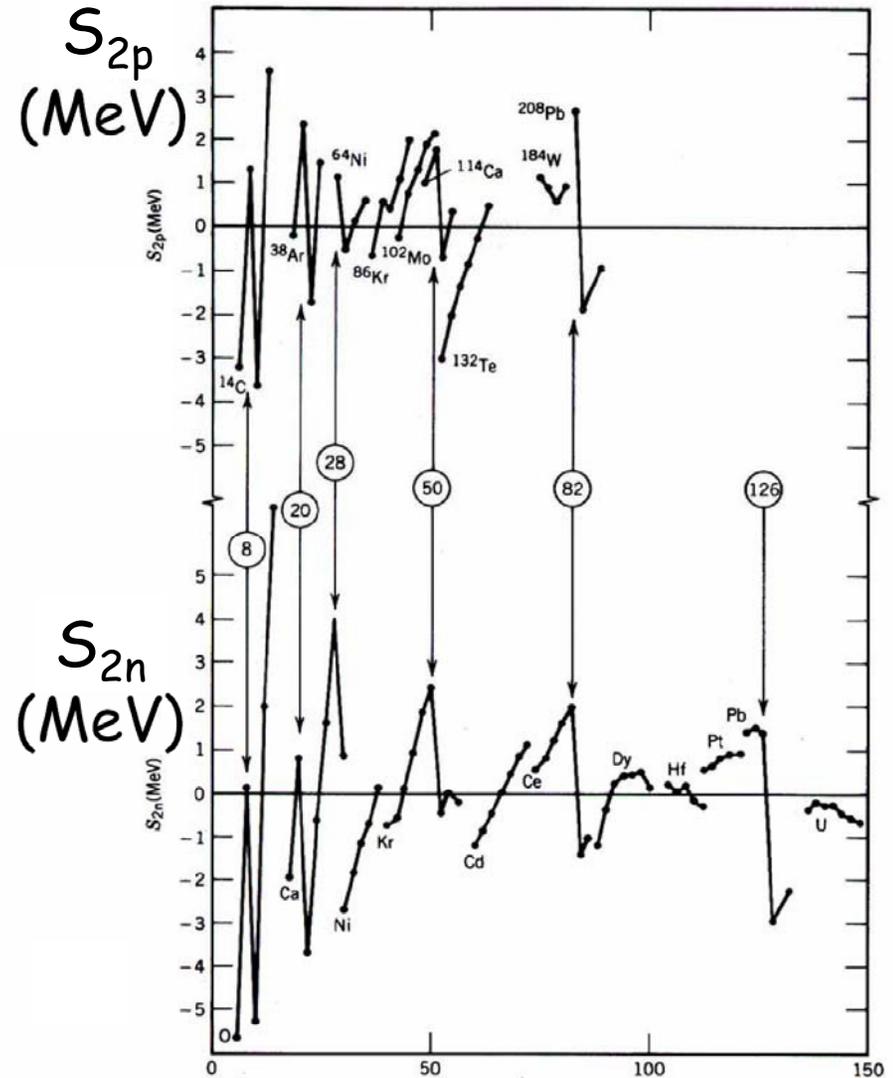
7 Kerne mit $N = 82$.

Von Sn ($Z = 50$) existieren

10 natürlich vorkommende Isotope.

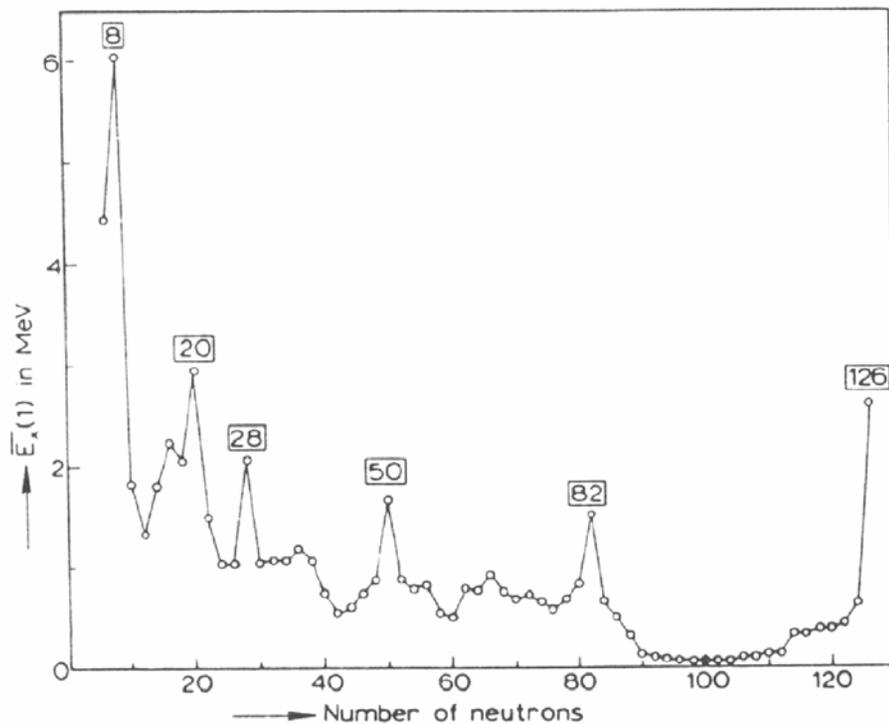
- Außergewöhnlich stabil sind doppelmagische Kerne wie:

${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ und ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.



Weitere Evidenz für magische Zahlen

- *verschwindende Quadrupolmomente*
- *Energie der ersten angeregten Zustände*



Schalenmodell

Ähnliches Phänomen ist aus der Physik der Elektronen in der Atomhülle bekannt: Edelgase mit abgeschlossener Valenzschale haben eine sehr große Ionisationsenergien. Alkalimetalle, welche in der Atomhülle nur ein Elektron zuviel besitzen, haben sehr kleine Ionisationsenergien.

In Analogie zur Atomphysik kann man vermuten, magische Zahlen entsprächen Schalenabschlüssen im Kern.

Wie überträgt man diese Vorstellung auf Kerne?

Die Nukleonen bewegen sich als freie Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem mittleren (sphärischen) Kernpotential. Dieses Potential stellt den gemittelten Effekt der Wechselwirkungen mit allen anderen Nukleonen im Kern darstellt.

Das mittlere Kernpotential $V(r)$ wird selbstkonsistent durch die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung erzeugt, die nur von einer relativ kurzen Reichweite ist.

Es liegt beim Kernpotential kein Analogon zum Coulombpotential einer zentralen Ladung wie in der Atomphysik vor!

Schalenmodell

Im Grundzustand besetzen die Nukleonen die niedrigsten verfügbaren Energieniveaus (-> minimale totale Energie) ohne das Pauli-Prinzip zu verletzen.

Pauli-Prinzip gilt unabhängig für Protonen und Neutronen.

Nukleonen bewegen sich auf wohl definierten Orbitalen mit diskreten Energien.

Nukleonen haben jedoch vergleichbare Größe wie der Kern. Wie entstehen wohldefinierte Bahnen ohne Nukleon-Nukleon-Stöße?

Pauli-Prinzip: Wenn Energie in einem Stoß übertragen wird, müssen die Nukleonen andere Orbitale (höhere und tiefere) besetzen. Alle nahen tiefliegenden Zustände sind jedoch besetzt. Die Nukleonen im Grundzustand bewegen sich deshalb kollisionsfrei innerhalb des Kerns.

Schalenmodell

Beschreibung der Nukleonen im Kern : Schrödingergleichung mit Hamilton - Operator

$$H = \sum_i \left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \Delta_i \right] + \sum_{i < j} V_{ij}$$

V_{ij} sind Potentiale der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen;

Gleichung ist bereits für kleine A exakt nicht lösbar.

V_{ij} werden durch abstandsabhängige Potentiale $V(\vec{r}_i)$ ersetzt :

$$H = \sum_i [T_i + V(\vec{r}_i)] + \left[\sum_{ij} V(\vec{r}_{ij}) - \sum_i V(\vec{r}_i) \right]$$

$$\text{Kinetische Energie : } \sum_i T_i = \sum_i \left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m_N} \right) \Delta_i \right]$$

$$\text{Restwechselwirkung : } V_R = \left[\sum_{ij} V(\vec{r}_{ij}) - \sum_i V(\vec{r}_i) \right]$$

Restwechselwirkung ist im Schalenmodell klein (?) und

kann in erster Näherung vernachlässigt werden $V_R = 0$

oder in Störungstheorie berücksichtigt werden.

$$H = \sum_i \left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \Delta_i \right] + \sum_i V(\vec{r}_i) + V_R$$

Schalenmodell

Beschreibung der Nukleonen im Kern :

Schrödingergleichung mit Hamilton - Operator

$$H = \sum_i \left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \Delta_i \right] + \sum_{i < j} V_{ij}$$

V_{ij} sind Potentiale der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen;

Gleichung ist bereits für kleine A exakt nicht lösbar.

$$H = \sum_i \left[- \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \Delta_i \right] + \sum_i V(\vec{r}_i) + V_R$$

Restwechselwirkung ist im Schalenmodell klein (?) und

wird in erster Näherung vernachlässigt $V_R = 0$

oder in Störungstheorie berücksichtigt.

Schalenmodell

$V(r)$ (nicht von $V(r, \theta, \phi)$!)
Wellenfunktionen WF der
Orbitale lassen sich separieren:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Ansatz Schrödinger-Gleichung:

$$H\psi_{nlm}(\vec{r}) = \left[\frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \psi_{nlm}(\vec{r}) = E_{nlm} \psi_{nlm}(\vec{r})$$

Lösungen des winkelabhängigen
Anteils: sphärische Kugelfunktionen
- bestimmt die Parität der WF

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left[\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]} P_{lm}(\cos \vartheta)$$

Gleichung für Radialanteil
Beachte: Zentrifugalpotential

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} + \left[E_{nl} - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_{nl}(r) = 0$$

$n - l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ist die Anzahl der Knoten der Radialwellenfunktion
 $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ stellt den Bahndrehimpuls dar
 $m = -l, \dots, l-1, l$ Projektion des Bahndrehimpuls auf z-Achse

Die Entartung von E ist $2(2l + 1)$, wobei der Vorfaktor 2 den zwei nach dem Pauli-Prinzip möglichen, entarteten Spineinstellungen Rechnung trägt.

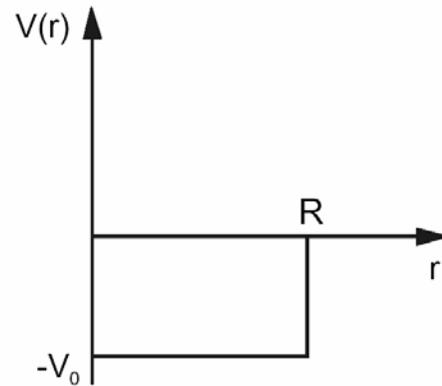
Kernpotential ist proportional zur Nukleonendichte $\rho(r)$: $V(r) \sim \rho(r)$

Schalenmodell

Zentralpotentiale $V(r)$

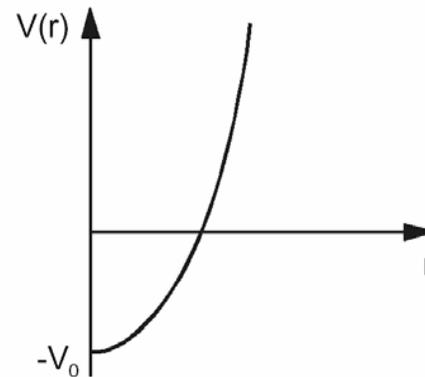
- Kasten

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & : r \leq R \\ 0 & : r > R \end{cases}$$



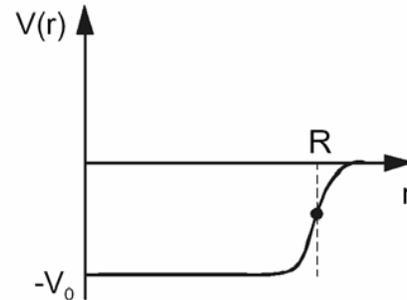
- Harmonischer Oszillator

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$



- Woods - Saxon

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R}{a}\right)}$$



Energie Eigenwerte

$$E = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$$

Entartung der Zustände mit verschiedenen n, l Werten :

$$N = 2(n - 1) + l$$

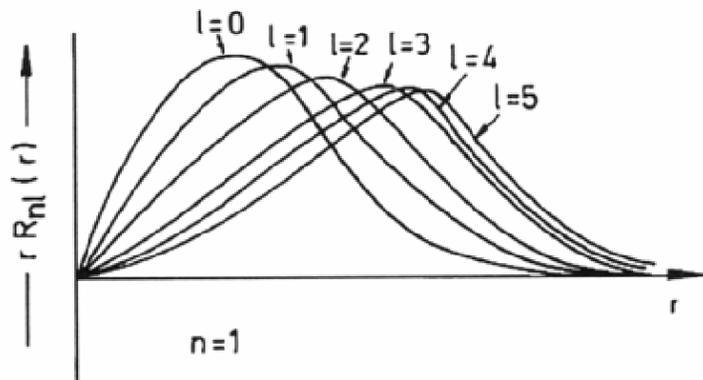
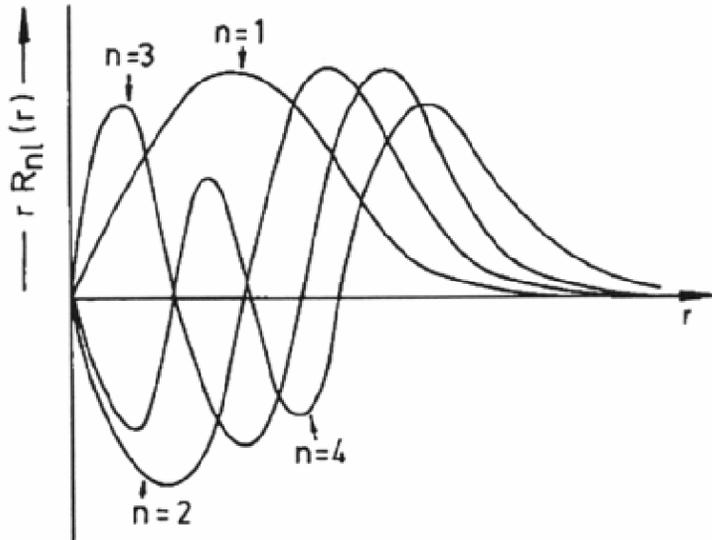
Realistischere Näherung
(siehe Ladungsverteilung)

V_0 Potentialtiefe,
 R Kernradius
 a Randunschärfe..

Schalenmodell Harmonischer Oszillator

Energie-Eigenwerte: $E_{nl} = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right)$

Entartung der Zustände: $N = 2(n-1) + l$



Oszillatorquantenzahl

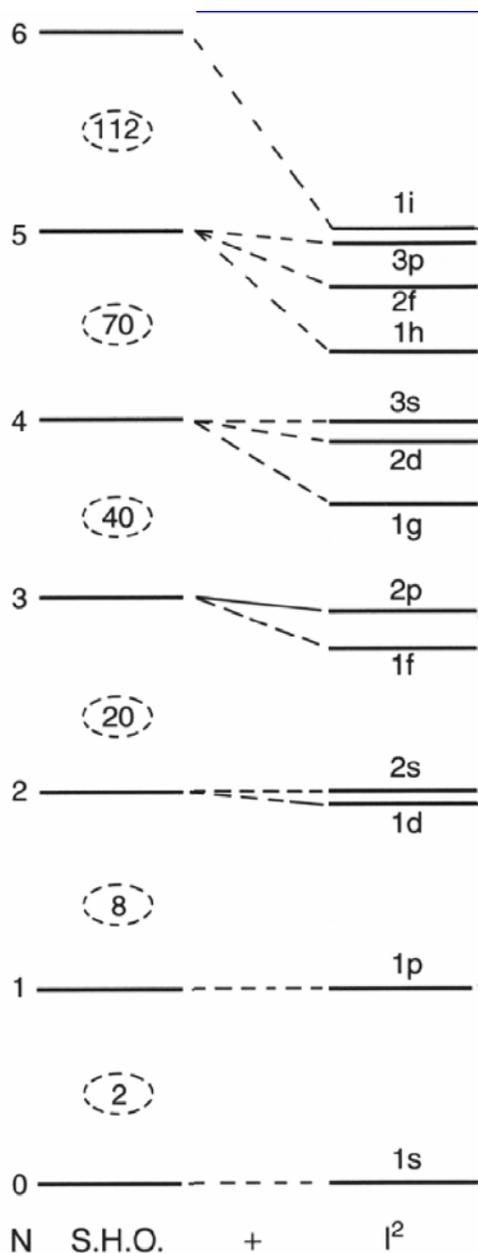
Hauptquantenzahl

Drehimpuls

N	n	l	Bezeichnung	Multiplizität $2(2l+1)$	Gesamtzahl der Nukleonen
0	1	0	1s	2	2
1	1	1	1p	6	8
2	1 2	2 0	1d 2s	10 2	18 20
3	1 3 2 1	3 2 1 0	1f 2p	14 6	34 40
4	1 4 2 2 3 0	4 3 2 1 0 0	1g 2d 3s	18 10 2	58 68 70

Drehimpuls: nur gerade l für gerade N, -> Parität +
ungerade l für ungerade N, -> Parität -

Schalenmodell Harmonischer Oszillator



- *Rechnungen mit Harmonischer Oszillator Potential reproduzieren die magischen Zahlen größer 20 nicht!*
- *Mögliche Ursache: falscher Potentialverlauf bei harmonischem Oszillator im Kerninnern? Nukleonen spüren immer Potential mit Gradienten. Man erwartet einen flachen Potentialverlauf.*
- *Korrektur durch einen attraktiven Anteil im Potential der proportional zu l^2 ist. Auswirkung auf große l Werte: Energien werden abgesenkt. Auswirkung wie ein effektives Absenken des Potentials bei großem R , Entspricht einem flacheren Potentialverlauf.*
- *Diese Korrektur reproduziert die magischen Zahlen jedoch auch nicht!*
- *Auch Modellrechnungen Rechteck- und Woods-Saxon Potential können die magischen Zahlen größer 20 nicht reproduzieren.*

LS-Kopplung

- M. Goeppert-Mayer und Jensen, Haxel, Suess liefern 1950 mit der **Spin-Bahn-Kopplung** den entscheidenden Beitrag für das Schalenmodell.

$$V(r) \rightarrow V(r) + V_{ls} \frac{dV(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

- Die Kopplung bewirkt eine Aufspaltung der Niveaus mit gleichem l

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)$$

Für Erwartungswert gilt :

$$\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \begin{cases} (l+1/2)(l+3/2) - l(l+1) - \frac{3}{4} & \text{wenn } j = l+1/2 \\ (l-1/2)(l+1/2) - l(l+1) - \frac{3}{4} & \text{wenn } j = l-1/2 \end{cases}$$

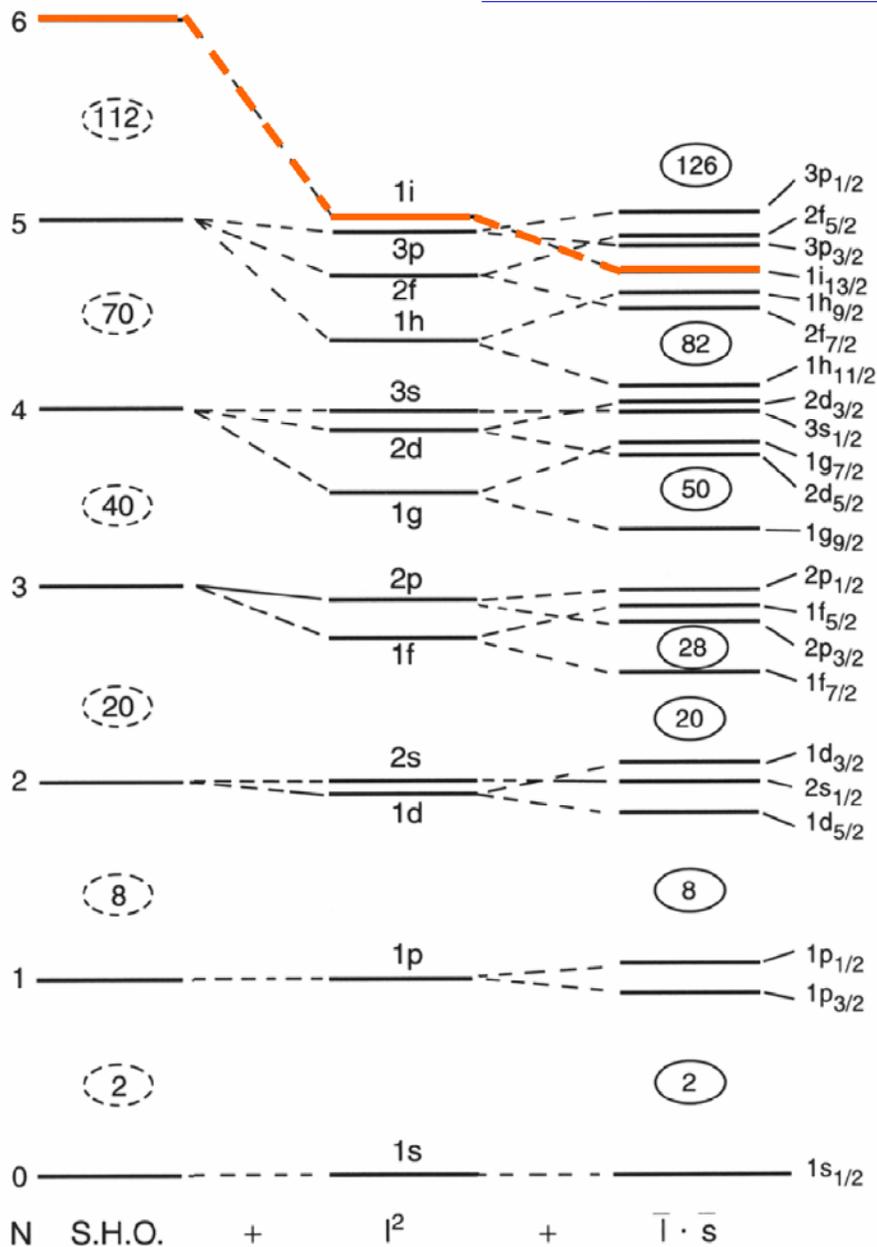
$$\text{für } j = l+1/2: V(r) + \frac{1}{2} V_{ls}(r) l$$

$$\text{für } j = l-1/2: V(r) - \frac{1}{2} V_{ls}(r) (l+1)$$

Energieaufspaltung wächst linear mit l

$$\Delta E \sim l + (l+1) = 2l+1$$

LS-Kopplung



Auswirkungen der Spin-Bahn-Kopplung

- Absenkung der $j=l+1/2$ Orbitale aus der höheren Oszillatorschale.

- **Reproduktion der magischen Zahlen!**

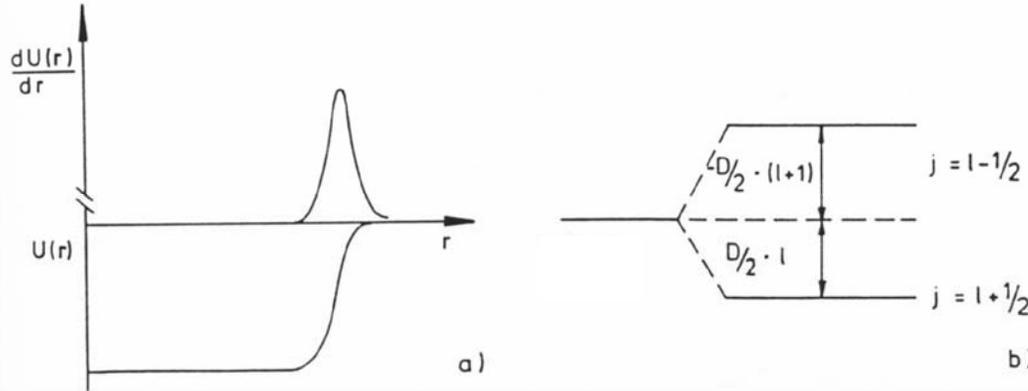
Wichtige Konsequenz:

- Abgesenkte Orbitale aus höherer $N+1$ Schale haben andere Parität als Orbitale der N Schale.

- Starke WW erhält Parität. Die abgesenkten Orbitale mit anderer Parität sind sehr reine Zustände und mischen nicht innerhalb der Schale.

LS-Kopplung

- *Spin-Bahn-Kopplung ist ein Effekt an der Oberfläche und ist für große l am stärksten.*



- *Im Gegensatz zur Atomhülle liegen die $j=l+1/2$ Zustände tiefer als die $j=l-1/2$ Zustände. Spin-Bahnwechselwirkung in Kernen hat umgekehrtes Vorzeichen wie die der Elektronenhülle. Grund: Abstoßendes Kernpotential zwischen Nucleonen bei kleinen Abständen.*

- *Direkter Nachweis der Spin-Bahn-Wechselwirkung durch elastische $n^4\text{He}$ -Streuung: Die $j=3/2$ Resonanz wird bei kleineren Energien als die $j=1/2$ Resonanz angeregt.*

