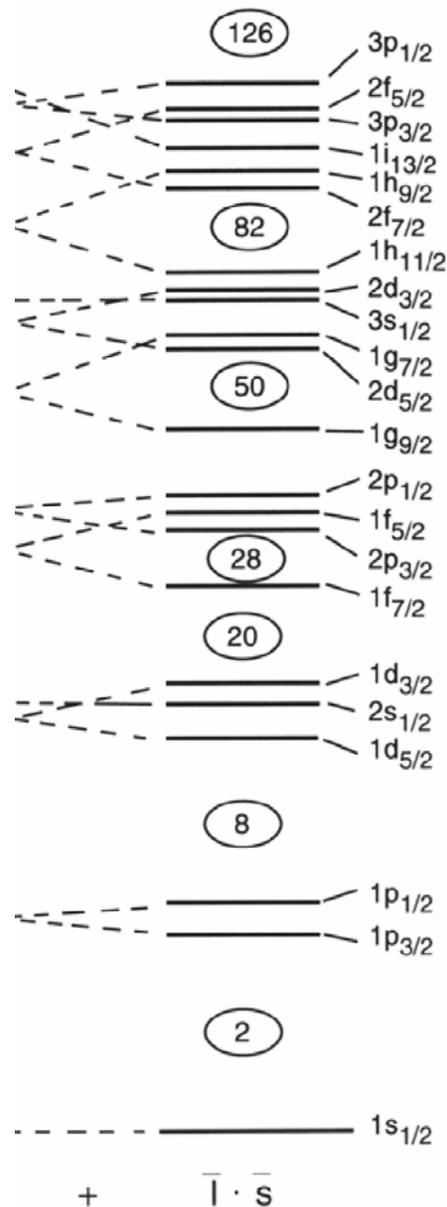


## Kernmodelle:

- Beschreibung deformierter Kerne
- Kollektive Anregungen
- $\gamma$ -Zerfälle



# Wiederholung: Erfolge des Schalenmodells



- Mit dem Schalenmodell können die **"magischen" Zahlen** erklärt werden.

- **Kernspin des Grundzustandes:**

Jedes Orbital hat  $2j+1$  magnetische Unterzustände, voll besetzte Orbitale haben Kernspin  $J=0$ , tragen nicht zum Kernspin bei.

Spin von Kernen mit einem Nukleon ausserhalb der besetzten Orbitale ist durch den Spin dieses Nukleons bestimmt.

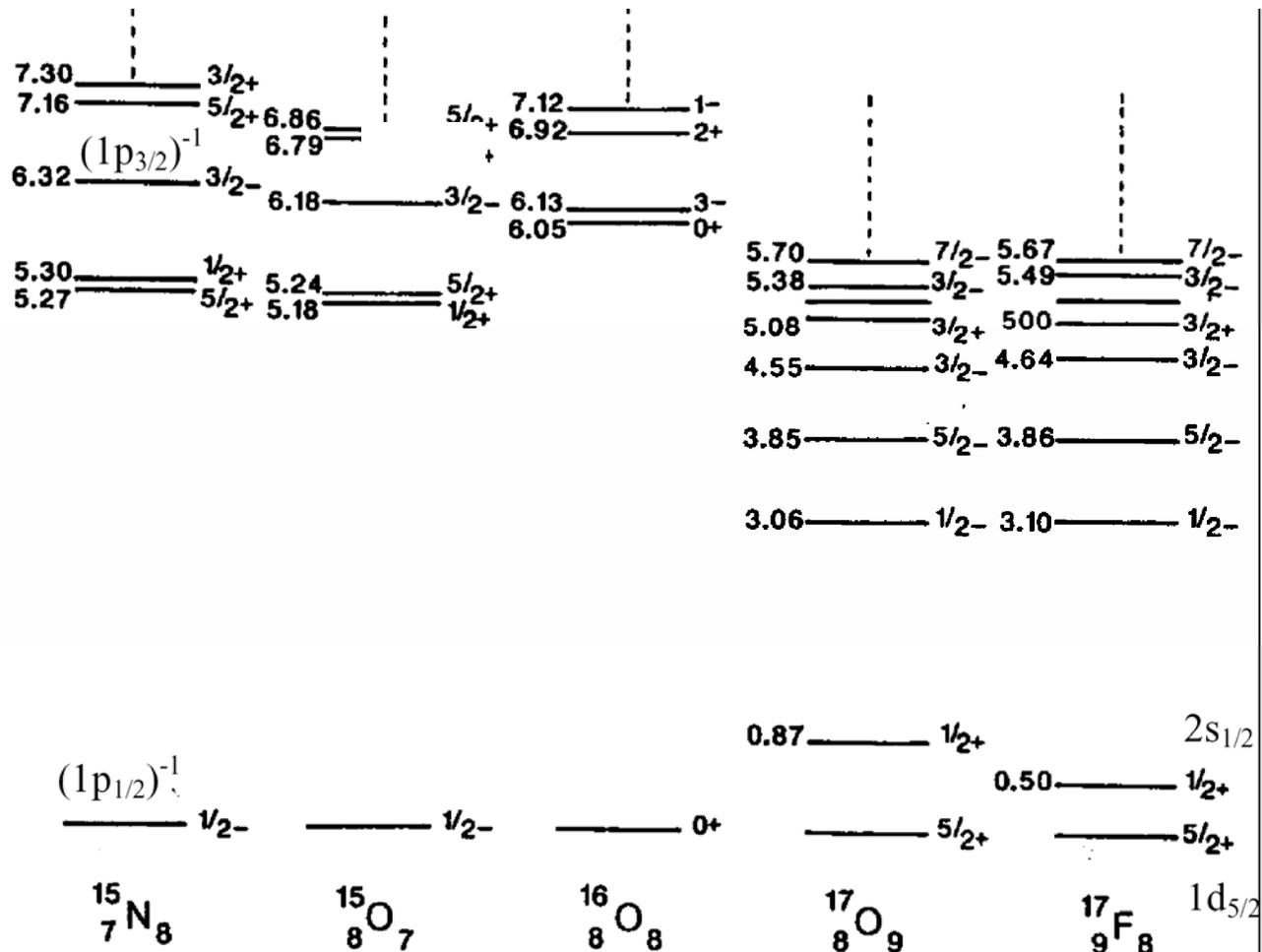
### Magnetische Momente:

Kern	Zustand	$J^P$	$\mu/\mu_N$	
			Modell	Experim.
<sup>15</sup> N	p-1p <sub>1/2</sub> <sup>-1</sup>	1/2 <sup>-</sup>	-0,264	-0,283
<sup>15</sup> O	n-1p <sub>1/2</sub> <sup>-1</sup>	1/2 <sup>-</sup>	+0,638	+0,719
<sup>17</sup> O	n-1d <sub>5/2</sub>	5/2 <sup>+</sup>	-1,913	-1,894
<sup>17</sup> F	p-1d <sub>5/2</sub>	5/2 <sup>+</sup>	+4,722	+4,793

# Wiederholung: Erfolge des Schalenmodells

- **Anregungsspektren** einzelner Teilchen oder Löcher werden quantitativ erklärt. Kerne **in der Nähe von magischen oder doppelt magischen Kernen** können mit dem Einteilchenschalenmodell gut beschrieben werden.

Beispiel: Spins und Anregungsenergien um doppelt-magischen Kern  $^{16}\text{O}$



# Deformierte Kerne

## **Deformierte Kerne**

Nur Kerne in der Nähe von abgeschlossenen doppelt-magischen Schalen sind kugelsymmetrisch und können mit einem Schalenmodell mit sphärischem Potential plus Spin-Bahn-Kopplung gut beschrieben werden (z.B.  $^{16}\text{O}$ ,  $^{15}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}$ ,  $^{17}\text{F}$ ).

Kerne mit halbgefüllten Schalen sind deformiert. Dies ist eine Konsequenz der anziehenden Restwechselwirkung zwischen Nukleonenpaare, die in Multipole entwickelt werden kann.

Restwechselwirkung:

Monopolterm  $\rightarrow$  sphärisches Potential

Quadrupolterm  $\rightarrow$  Polarisationsenergie, Deformation,

höheren Multipolterme  $\rightarrow$  Paarungsenergie .

## **Paarungsenergie**

Kerne gewinnen zusätzliche Energie, wenn sich Nukleonen mit gleicher Ortswellenfunktion zu Paaren mit Gesamtdrehimpuls Null gruppieren:

$$l_1=l_2 \quad m_1=-m_2 \quad j_1+j_2=0=J_p$$

Man spricht von der Paarungskraft.

# Paarungskraft

Die Paarungskraft ist kurzreichweitige Restwechselwirkung zwischen zwei Nukleonen, die zu folgenden Beobachtungen führt:

- Massenformel - Korrekturterm
- Hohe Separationsenergie eines Nukleones bei gepaarten Nukleonen gleicher Sorte
- gg-Kerne haben  $J=0^+$  Grundzustand
- Energielücke von  $\sim 1-2\text{MeV}$  im Anregungsspektrum von gg-Kernen

Beschreibung der Paarungskraft durch  $\delta$ -Kraft:

$$V_{12} = -V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Kraft wirkt zwischen Nukleonenpaaren, die zu  $J = 0$  gekoppelt sind und maximalen Überlapp zeigen.

Das mittlere Einteilchen-Potential stammt im wesentlichen vom langreichweitigen Beitrag der Kernkraft ab, während die Restwechselwirkungen kurzreichweitig sind.

Reichweite der Restwechselwirkungen

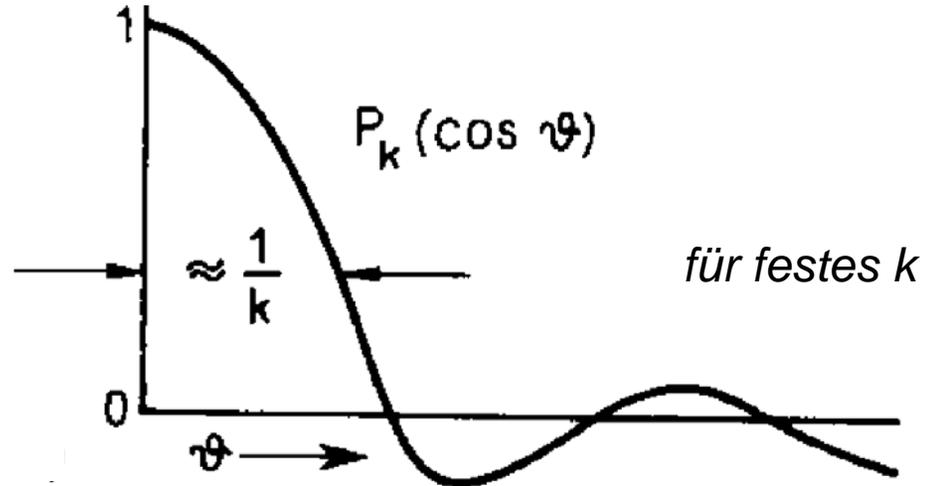
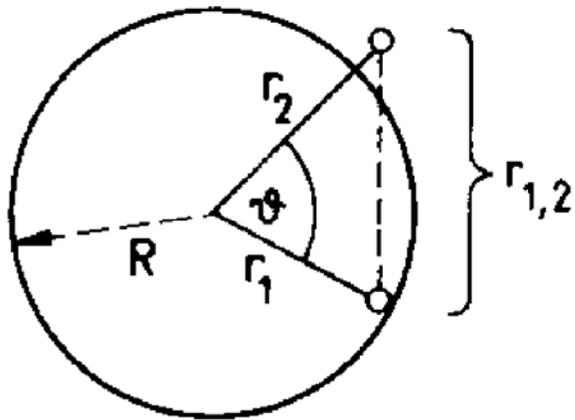
$$V(r_{1,2}) = \sum_k R_k(r_1, r_2) \cdot P_k(\cos \vartheta)$$

# Paarungskraft

Reichweite der Restwechselwirkungen

$$V(r_{1,2}) = \sum_k R_k(r_1, r_2) \cdot P_k(\cos \vartheta)$$

Phänomenologischer Ansatz!



$k = 0$   $P_0(\cos \vartheta) = 1$   $\rightarrow$  Zentralpotential

$k = 2$   $P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \vartheta - 1)$   $\rightarrow$  Quadrupoldeformation

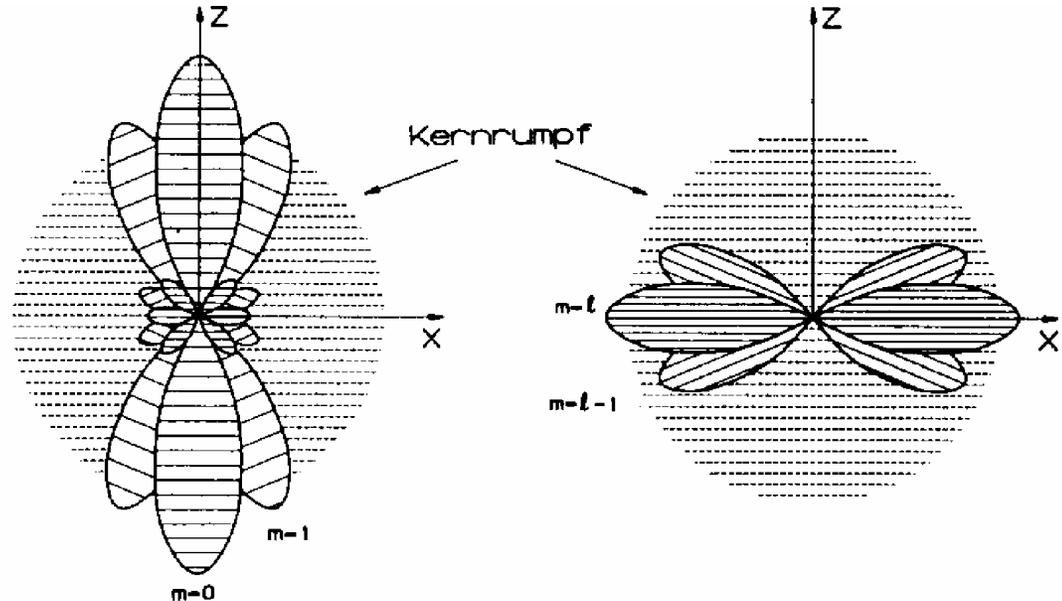
Für große  $k$  Werte: Der Hauptbeitrag des Polynoms kommt von Werten mit  $<1/k$ ,  
da  $\vartheta \sim r_{12}/R$  ist folgt daraus  $\mathbf{r}_{12} < \mathbf{R}/k$

Beiträge hoher Multipole führen zur kurzreichweitigen Paarkraft.

# Deformierte Kerne

## **Polarisationsenergie**

Die Nukleonen besetzen bevorzugt benachbarte Orbitale (benachbartes  $m$ ), was bei halbgefüllten Schalen zur Polarisierung des Core und damit zur Deformation führt.



## **Drehimpuls und Parität**

Ungerade Nukleonenzahl: Drehimpuls und Parität wird im Grundzustand durch das letzte Nukleon bestimmt.

Doppelt gerade Nukleonenzahl: Auf Grund der Paarungsenergie haben gg-Kerne im Grundzustand  $J^\pi=0^+$ .

Doppelt ungerade Nukleonenzahl: Spin und Parität ergeben sich aus der Kopplung der letzten beiden Nukleonen.

Nordheim Regel: Spins von Neutron und Proton sind tendenziell parallel gerichtet.

# Deformierte Kerne

## **Quadrupolmomente:**

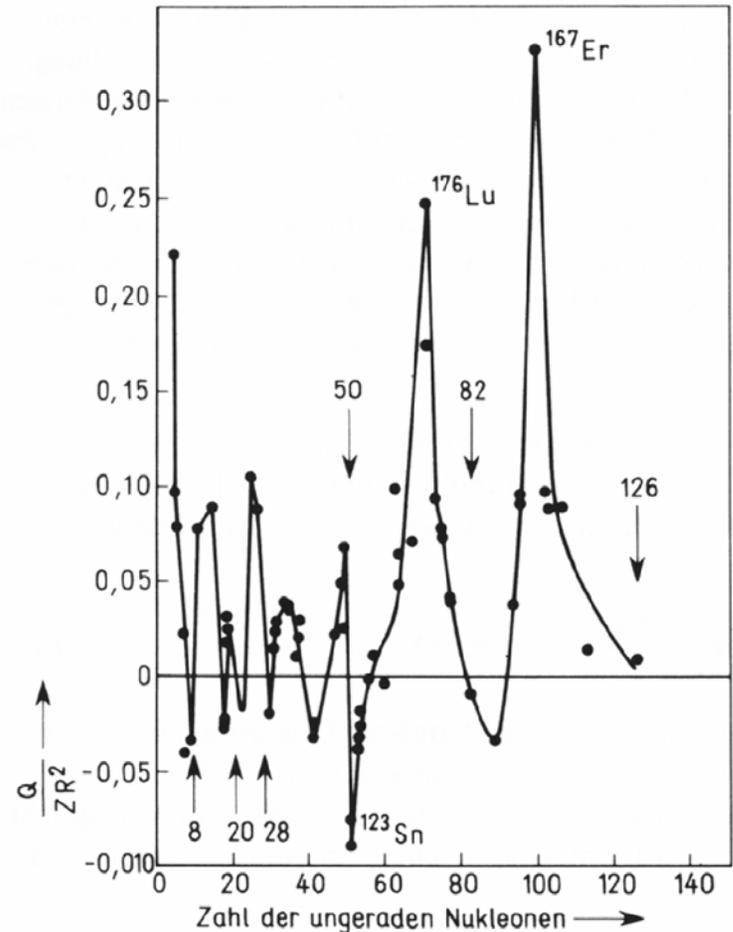
Abweichungen von der Intervallregel der Hyperfeinstruktur weisen auf endliche Quadrupolmomente hin.

Q verschwindet in der Nähe abgeschlossener magischer Zahlen.

Abgeplattete oblate Kerne ( $Q < 0$ ) sind weniger häufig als prolat zigarrenförmig deformierte.

Die teilweise besetzten Protonen- und Neutronenbahnen polarisieren die Kernrümpfe und verursachen große Deformation.

Reduziertes Quadrupolmoment:  $Q/Z e \langle R \rangle^2$



# Nilsson Modell

## **Nilsson Modell**

*Nilsson Modells ist ein einfaches Einteilchenmodell das für fast alle deformierten Kerne verwendet werden kann. Es beschreibt viele Eigenschaften von Einteilchen-Zuständen in deformierten Kernen.*

*Nilsson verwendete den Einteilchen-Hamilton-Operator für einen Kern mit der Symmetrieachse z:*

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m[\omega_x^2(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) + \omega_z^2\mathbf{z}^2]}{2} + C\mathbf{l} \bullet \mathbf{s} + D\mathbf{l}^2$$

- 1. Term: kinetische Energie des Teilchens
- 2. Term: anisotroper harmonischer Oszillator mit:  $\omega_x^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2\right) = \omega_y^2$   
 $\omega_z^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon_2\right)$

$\varepsilon_2$  ist Deformationsparameter (andere Def.parameter:  $\beta_2 \sim 1.05\varepsilon_2$  oder  $\delta$ )

- 3. Term: Spin-Bahn Kopplung reproduziert die magischen Zahlen für  $\varepsilon_2 = 0$
- 4. Term: Bei großen Radien spüren Nukleonen ein steileres Potential im Vergleich zum harmonischen Oszillator; wirkt besonders auf Nukleonen mit hohem l-Wert.

# Deformierte Kerne

## Nilsson Zustände

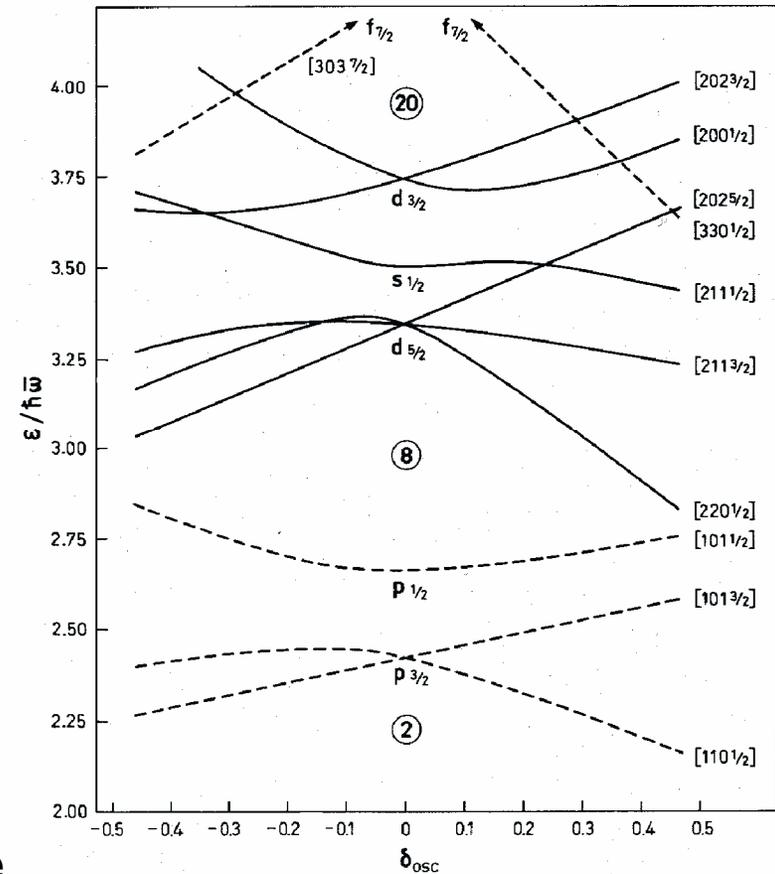
Zur Charakterisierung der Zustände werden die asymptotische Quantenzahlen  $[Nn_z\Lambda \Omega^\pi]$  oder  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$  verwendet. (Definition kommt gleich)

Nur für große Deformationen  $\beta_2, \delta$  sind  $[Nn_z\Lambda]$  Konstanten der Bewegung.

Bei großer Deformation, kann man die Bewegung eines Nukleons im deformierten Potential trennen in Komponenten entlang und senkrecht zu der Deformationsachse, die bei axial symmetrischer Deformation als Quantisierungsachse dienen kann.

Die Entartung der Zustände mit bestimmten  $j$ , wird hinsichtlich ihrer Projektion  $m$  auf die Deformationsachse aufgehoben, Zustände mit  $\pm m$  bleiben entartet.

Beispiel:  $j = 5/2$  spaltet in 3 Komponenten auf mit  $|m|= 5/2; 3/2; 1/2$



# Asymptotische Quantenzahlen $\Omega^\pi[Nn_z\Lambda]$

Asymptotische Quantenzahlen des Nilsson Modells  $[Nn_z\Lambda \Omega^\pi]$  oder  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$

N Gesamte Zahl der Oszillatorquanten

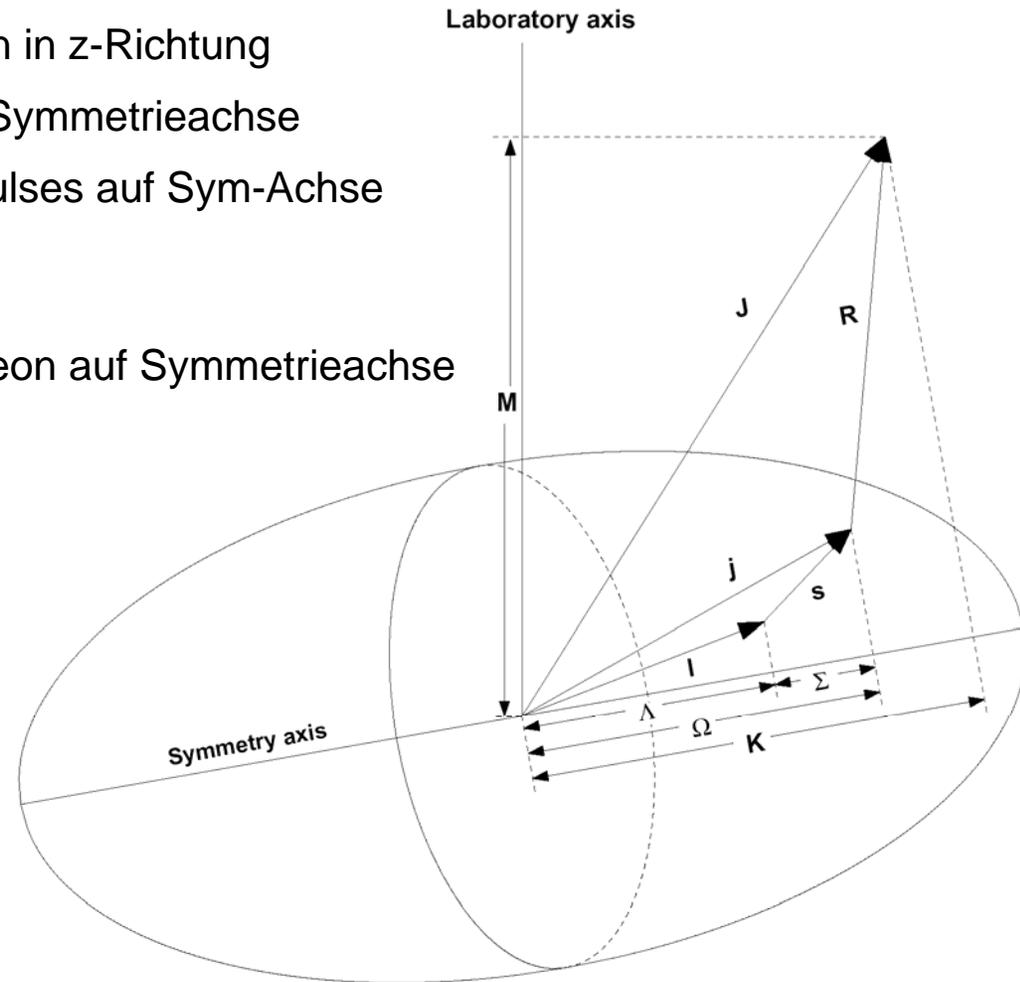
$n_z$  Zahl der Knoten der Radialwellenfunktion in z-Richtung

$\Lambda$  Projektion des Bahn-Drehimpulses I auf Symmetrieachse

$\Omega$  Projektion des totalen Teilchen-Drehimpulses auf Sym-Achse

$\pi$  Parität der Wellenfunktion

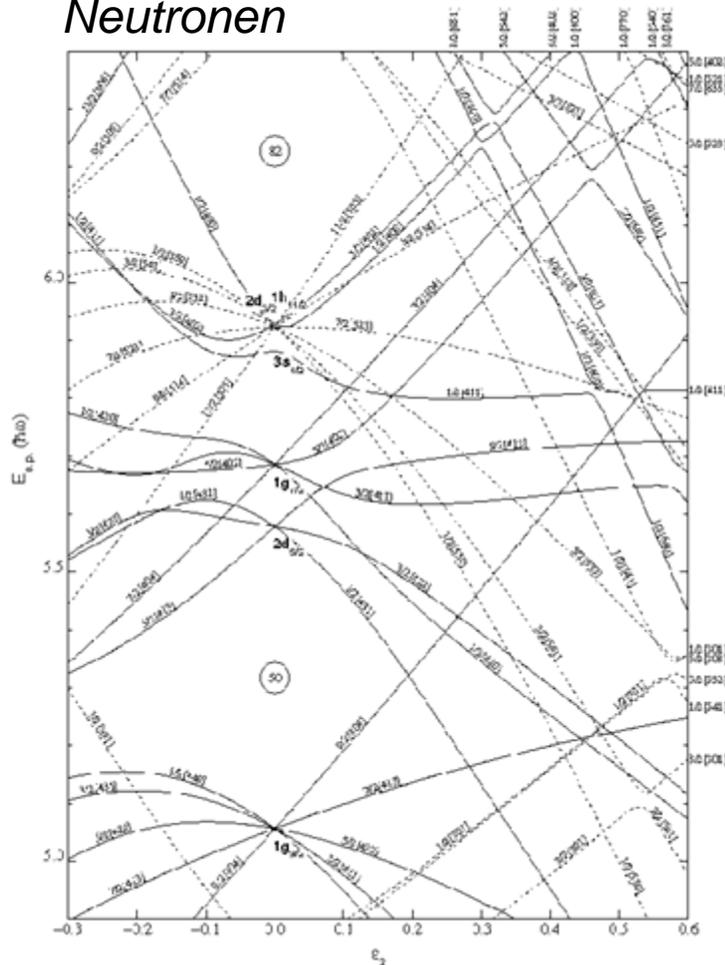
j (Orbital I plus spin s) des ungeraden Nukleon auf Symmetrieachse



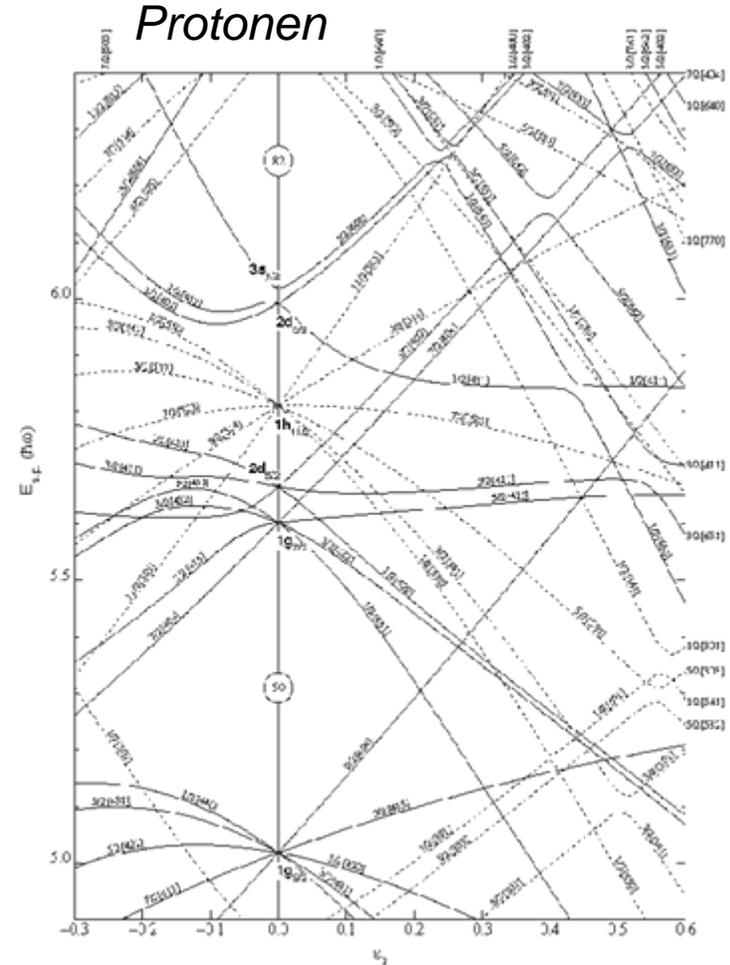
Die Einteilchenzustände können durch die Angabe der Basisvektoren  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$  und Angabe von  $J^\pi$  bezeichnet werden.

# Nilsson Diagram

Neutronen



Protonen



Orbitale mit  
 - positiver Parität: durchgezogene Linie  
 - negativer Parität gepunktete Linie  
 Einteilchenenergieniveaus zwischen Schalen  
 bei 50 und 82 als Funktion der Deformation.

Differenzen in der Energie zwischen  
 Niveaus der Protonen und Neutronen  
 durch Coulombabstoßung der Protonen.

# Weitere Quantenzahlen

Asymptotische Quantenzahlen des Nilsson Modells  $[Nn_z\Lambda \Omega^\pi]$  oder  $\Omega^\pi [Nn_z\Lambda]$

$\Lambda$  Projektion des Drehimpulses  $I$  auf Symmetrieachse

$\Sigma$  Projektion des intrinsischen Spins  $s$  auf Symmetrieachse

$\Omega$  Projektion des totalen Teilchen-Drehimpulses auf Sym-Achse

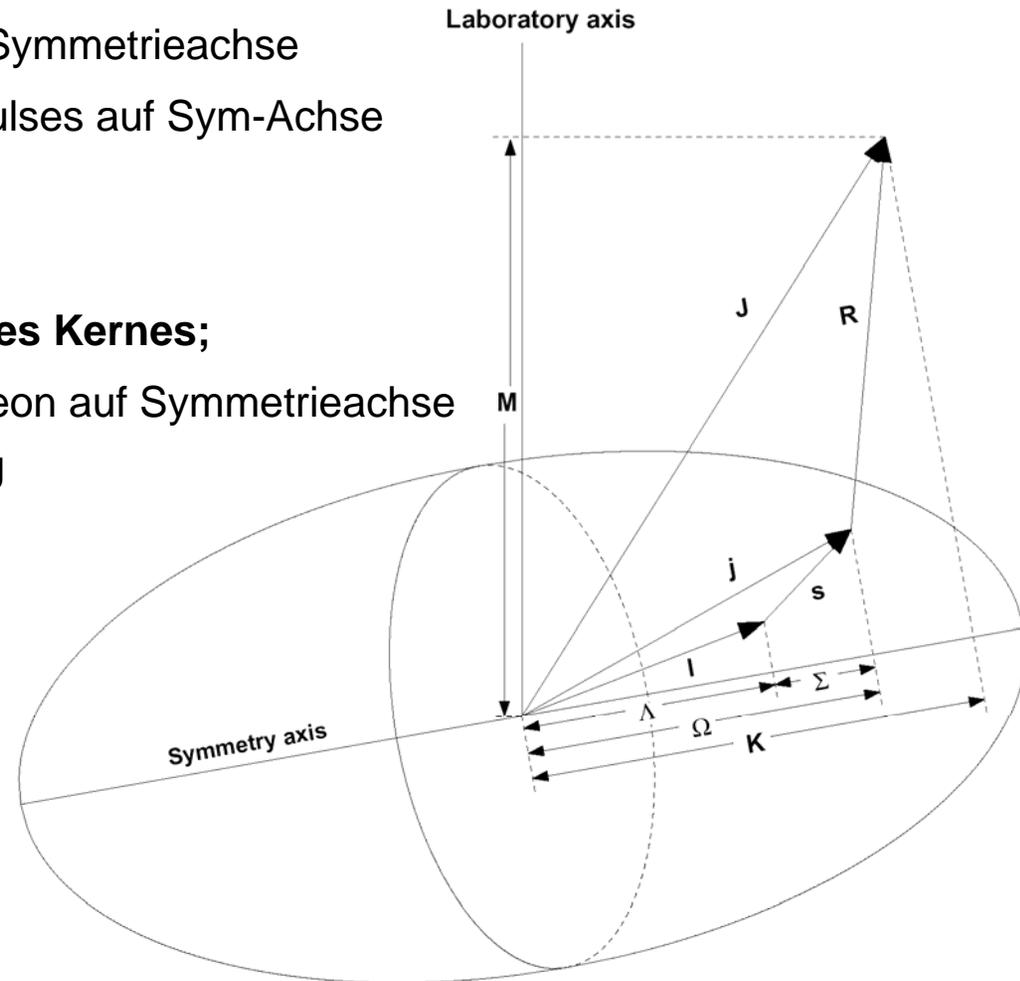
$$\Omega = \Lambda + \Sigma$$

**R Drehimpuls der kollektiven Rotation des Kernes;**

$j$  (Orbital  $l$  plus spin  $s$ ) des ungeraden Nukleon auf Symmetrieachse

$M$  Projektion des gesamten Drehimpulses  $J$   
auf z-Achse im Labor

$K$  Projektion des gesamten Drehimpulses  $J$   
auf Symmetrie-Achse



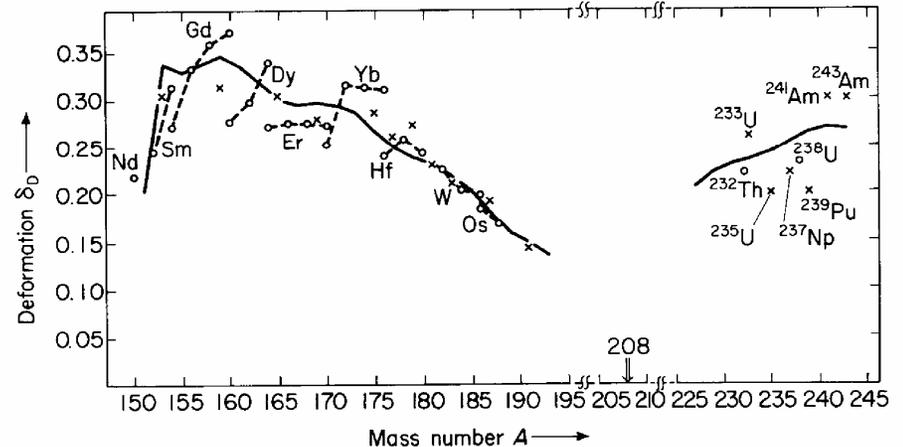
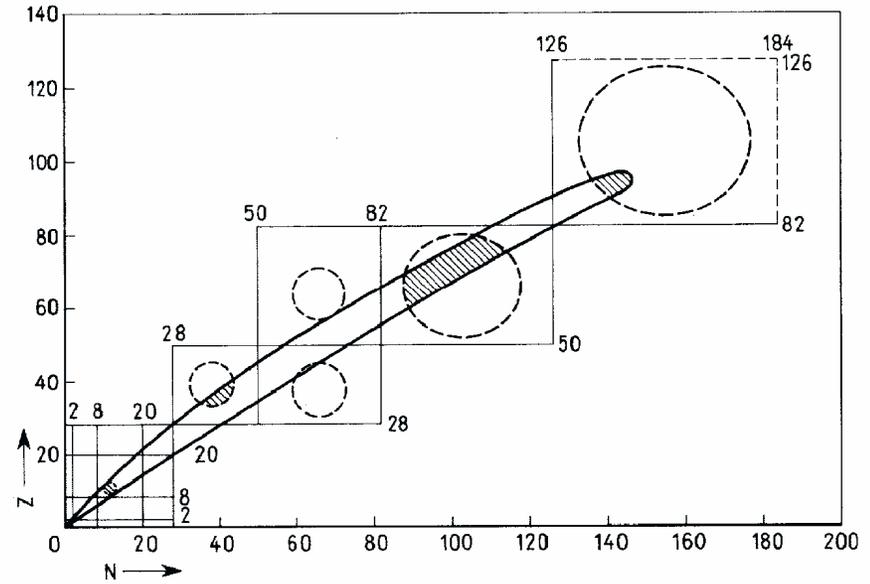
# Deformierte Kerne

Für deformierte ungerade Kerne wurden

- Grundzustandsspins,
- magnetische Momente und
- Quadrupolmomente

mit Hyperfeinstrukturspektroskopie bestimmt und im Rahmen des Nilsson-Modells erklärt.

Nucleus	Deformation $\delta_D$	Ground-state spin $J_{g.s.}^\pi$	
		Theoretical	Experimental
$^{151}_{63}\text{Eu}$	0.16	$\frac{3}{2}^{\pm}, \frac{5}{2}^{\pm}, \frac{1}{2}^{-}$	$\frac{5}{2}(\pm)$
$^{153}_{63}\text{Eu}$	0.30	$\frac{5}{2}^+, \frac{3}{2}^+$	$\frac{5}{2}(+)$
$^{159}_{65}\text{Tb}$	0.31	$\frac{3}{2}^+, \frac{5}{2}^+$	$\frac{3}{2}(+)$
$^{165}_{67}\text{Ho}$	0.30	$\frac{7}{2}^-, \frac{1}{2}^+$	$\frac{7}{2}(-)$
$^{169}_{69}\text{Tm}$	0.28	$\frac{1}{2}^+, \frac{7}{2}^-$	$\frac{1}{2}^+$
$^{175}_{71}\text{Lu}$	0.28	$\frac{7}{2}^+, \frac{5}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$
$^{181}_{73}\text{Ta}$	0.23	$\frac{5}{2}^+, \frac{7}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$
$^{185}_{75}\text{Re}$	0.19	$\frac{9}{2}^-, (\frac{5}{2}^+)$	$\frac{5}{2}^+$
$^{187}_{75}\text{Re}$	0.19	$\frac{9}{2}^-, (\frac{5}{2}^+)$	$\frac{5}{2}^+$



# Kollektive Kernanregungen

Die Anregung von Einteilchenzuständen ist auf Kerne in der Nähe abgeschlossener Schalen beschränkt. Bei allen Kernen (außer den sehr leichten) ist die Anregung **kollektiver Freiheitsgrade** möglich.

Kerne mit vielen Nukleonen außerhalb abgeschlossener Schalen zeigen auch kollektive Anregungsspektren.

Kollektive Kernanregungen sind Fluktuationen des Kerns um die Gleichgewichtslage:  
Dichtefluktuationen oder Formfluktuationen

Experimentelle Untersuchung:  
Kollektive Anregungen werden am besten mit Hilfe elektromagnetischer Übergänge untersucht, d.h. mit  **$\gamma$ -Spektroskopie**

Beobachtete kollektive Kernanregungen:

- Rotationszustände deformierter Kerne
- Vibrationszustände
  - Quadrupolschwingungen
  - Oktupolschwingungen
- Riesenresonanzen
  - Dipolriesenresonanz

Analogie in der Molekülphysik:

- Einteilchenanregung
- Vibration
- Rotation

Informationen über den Charakter der Anregung erhält man aus:

- Systematik der Anregungsenergien
- Übergangswahrscheinlichkeiten
- $\gamma$ -Winkelverteilung

# Rotationen

Kerne mit vielen Nukleonen außerhalb geschlossener Schalen sind stark deformiert.

Quantenmechanik: System mit sphärischer Symmetrie kann nicht rotieren!

Der Kern kann als Ganzes rotieren.

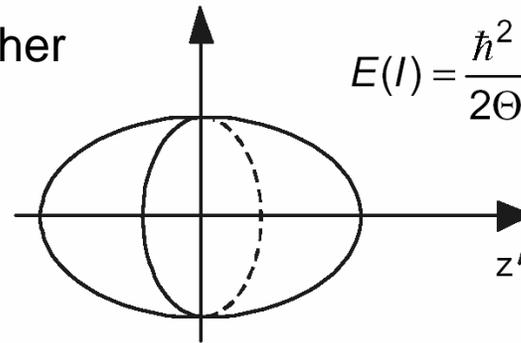
Der Hamiltonoperator der Rotation für gg-Kerne mit  $J^\pi = 0^+$  im Grundzustand ist

$$H_{Rot} = \frac{\vec{J}^2}{2\Theta}$$

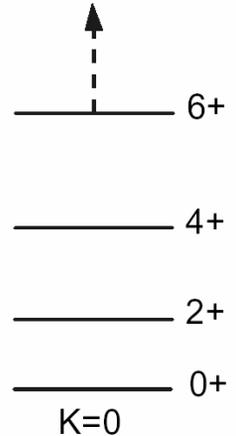
mit dem Drehimpulsoperator

Eigenfunktionen: Kugelflächenfunktionen  $Y_J^m(\vartheta, \varphi)$

Eigenwerte:  $E_J = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2\Theta}$



$$E(I) = \frac{\hbar^2}{2\Theta} \cdot I(I+1)$$



Im Experiment beobachtet man Rotationsbanden, äquidistante Linien im Spektrum.

# Rotationen

## *Kopplung von Einteilchenspin und kollektivem Drehimpuls*

Bei Kernen mit ungerader Nukleonenzahl koppelt der Spin des Einteilchenzustandes mit dem Drehimpuls der kollektiven Rotation.

Bei deformierten gg-Kernen beobachtet man reine Rotationszustände, da der Grundzustand  $J^\pi = 0^+$  ist.

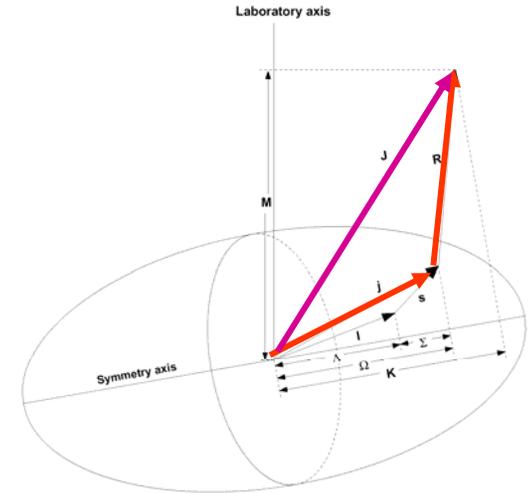
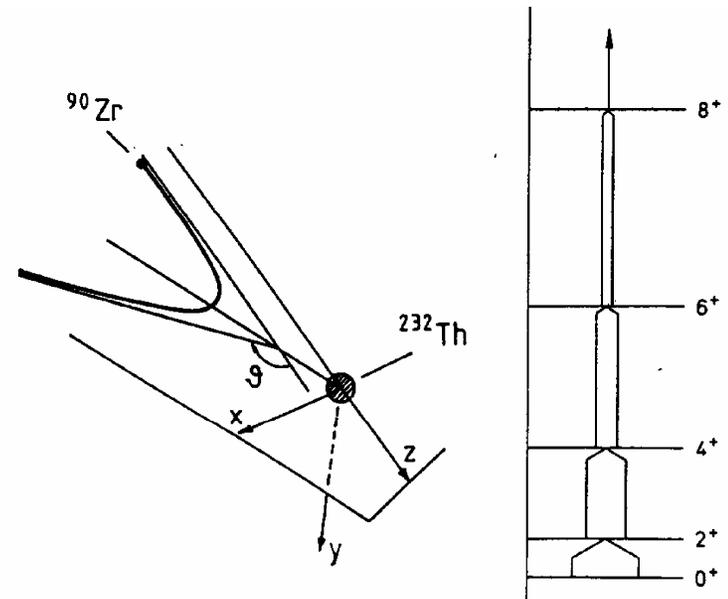


Figure 2. Asymptotic quantum numbers for the deformed shell model

## Experimente zur Rotationsanregung

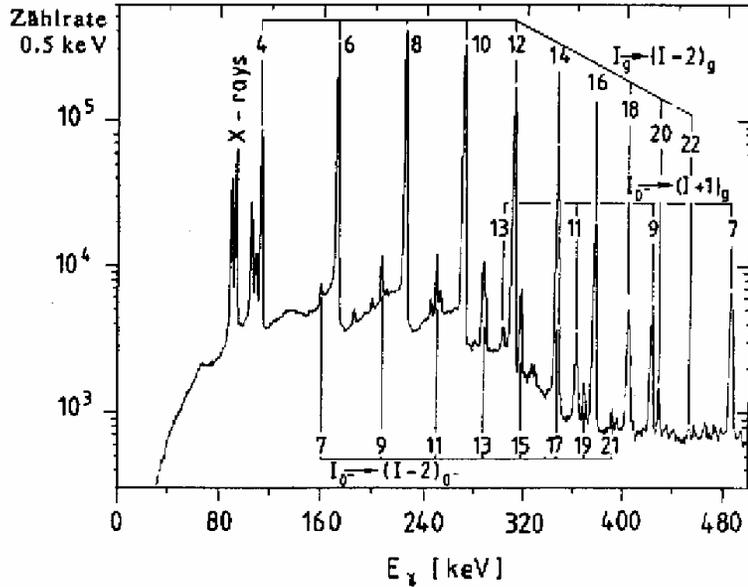
### *Coulomb-Anregung in Schwerionen-Reaktionen*

Der Targetkern "sieht" ein schnell veränderliches Feld. Die Anregungswahrscheinlichkeit wächst mit abnehmendem Stoßparameter. Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zu  $Z^2$  Projektil. In einem Stoß werden aufeinanderfolgende Niveaus sukzessiv bevölkert.



# Rotationen

Coulombanregung von  $^{232}\text{Th}$   
gemessenes  $\gamma$ -Spektrum



Kopplung von Rotation und Vibration

Neben der Grundzustandsbande gibt es Seitenbanden, die auf Vibrationszuständen aufbauen.

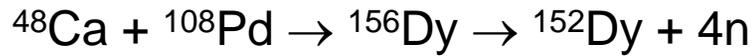
$^{232}\text{Th}$

$23^-$	3617.3	$24^+$	3619		
$21^-$	3204.7	$22^+$	3144	$20^+$	3248
$19^-$	2813.9	$20^+$	2691.4	$18^+$	2831
$17^-$	2445.7	$18^+$	2262.4	$18^+$	2766.1
$15^-$	2102.0	$16^+$	1858.7	$16^+$	2440.3
$13^-$	1784.9	$14^+$	1482.5	$16^+$	2445.3
$11^-$	1498.8	$12^+$	1137.1	$14^+$	2117.1
$9^-$	1249.6	$10^+$	826.8	$12^+$	1754.7
$7^-$	1043.1	$8^+$	556.9	$12^+$	1801.4
$5^-$	883.8	$6^+$	333.2	$11^+$	~1641
$3^-$	774.5	$4^+$	162.0	$10^+$	1513.0
$1^-$	714.3	$2^+$	49.4	$9^+$	~1371
		$0^+$	0	$8^+$	1260.7
				$7^+$	~1142
				$6^+$	1051.2
				$5^+$	960.3
				$4^+$	890.5
				$3^+$	829.7
				$2^+$	785.5
				$0^+$	730.6
				$0^-$	
				$2^+$	

# Rotationen

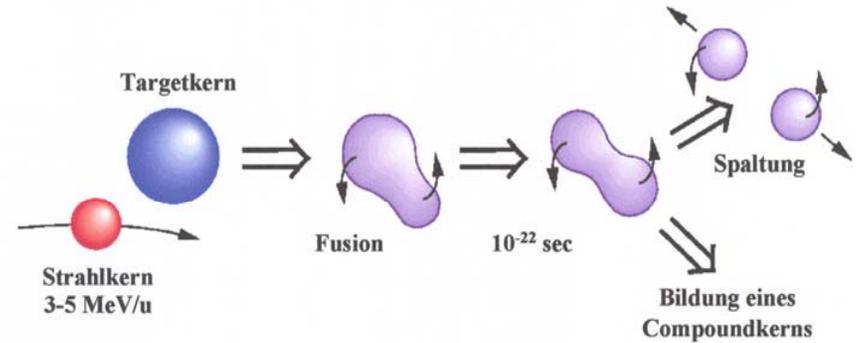
Die höchsten Drehimpulse werden jedoch in Fusionsreaktionen übertragen

Beispiel:

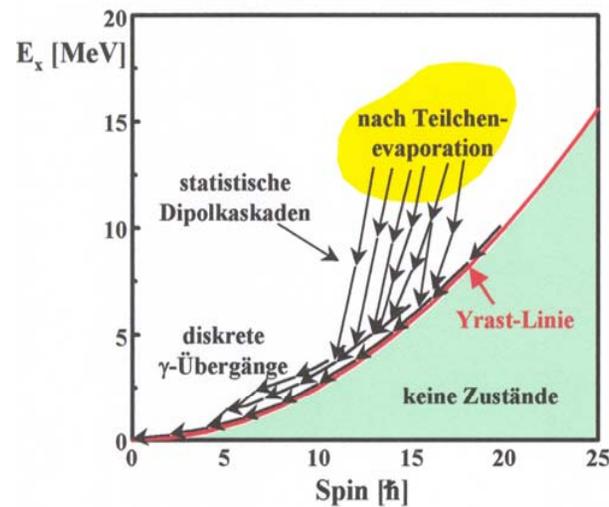


Es werden Zustände bis zu  $J^\pi=60^+$  bevölkert.

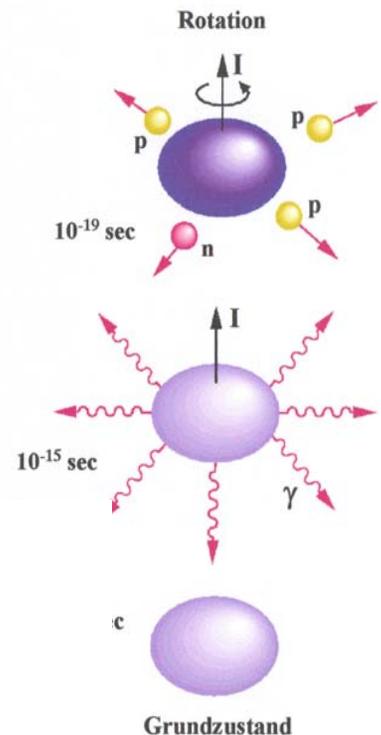
Klass. Argument für hohen Drehimpulsübertrag:  $l \leq R p$



Zustandsdiagramm



$$\hbar\omega \sim 0.75 \text{ MeV} \sim 2 \times 10^{20} \text{ Hz}$$



# Rotationen

Die höchsten Drehimpulse werden jedoch in Fusionsreaktionen übertragen,  
z.B.:



Es werden Zustände bis zu  $J^\pi=60^+$  bevölkert.

$$l \leq R p$$

Trägheitsmoment

Die Größe des Trägheitsmoments erhält man aus den Energieniveaus der Rotationsbanden.

## Rotationsenergie und Drehimpuls

$$E = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$l = \Theta \omega$$

Symmetrie ► nur gerade  $l$

Grundzustand (g-g) ►  $0^+$

$$E(l) = \frac{\hbar^2}{2\Theta} l(l+1)$$

$$E(0^+) = 0$$

$$E(2^+) = 6(\hbar^2 / 2\Theta) = 91.4 \text{ keV} \Rightarrow \hbar^2 / 2\Theta = 15.23 \text{ keV}$$

$$E(4^+) = 20(\hbar^2 / 2\Theta)$$

*Aus Spektren des Experiment*

# Rotationen

## Trägheitsmoment

Die Größe des Trägheitsmoments erhält man aus den Energieniveaus der Rotationsbanden.

Den Deformationsparameter  $\delta$  erhält man aus der Übergangswahrscheinlichkeit (nächstes Kapitel  $\gamma$ -Zerfall):

$$W_{fi}^{E2} \propto Q = \frac{4}{5} Z e \langle R \rangle^2 \delta$$

Grenzfälle:

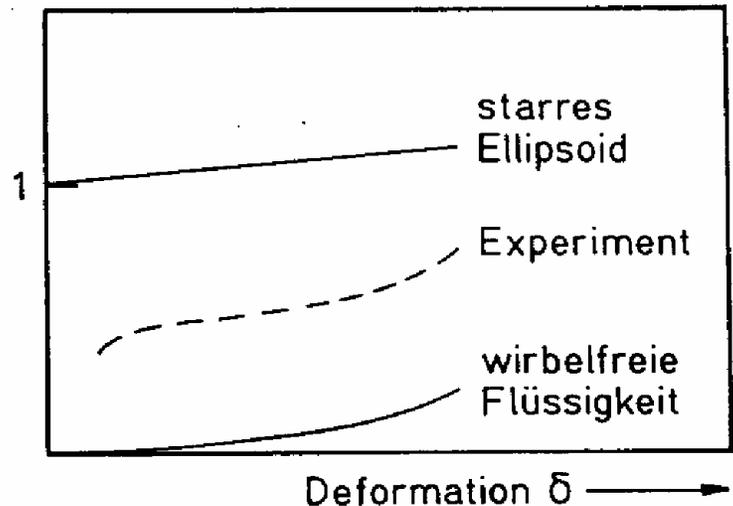
Starre Kugel:

$$\Theta_{\text{starreKugel}} = \frac{2}{5} M R_0^2$$

reibungsllose Flüssigkeit:

$$\Theta_{\text{flüssig}} = \frac{45\delta^2}{16\pi} \Theta_{\text{starreKugel}}$$

$\Theta/\Theta_{\text{starre Kugel}}$



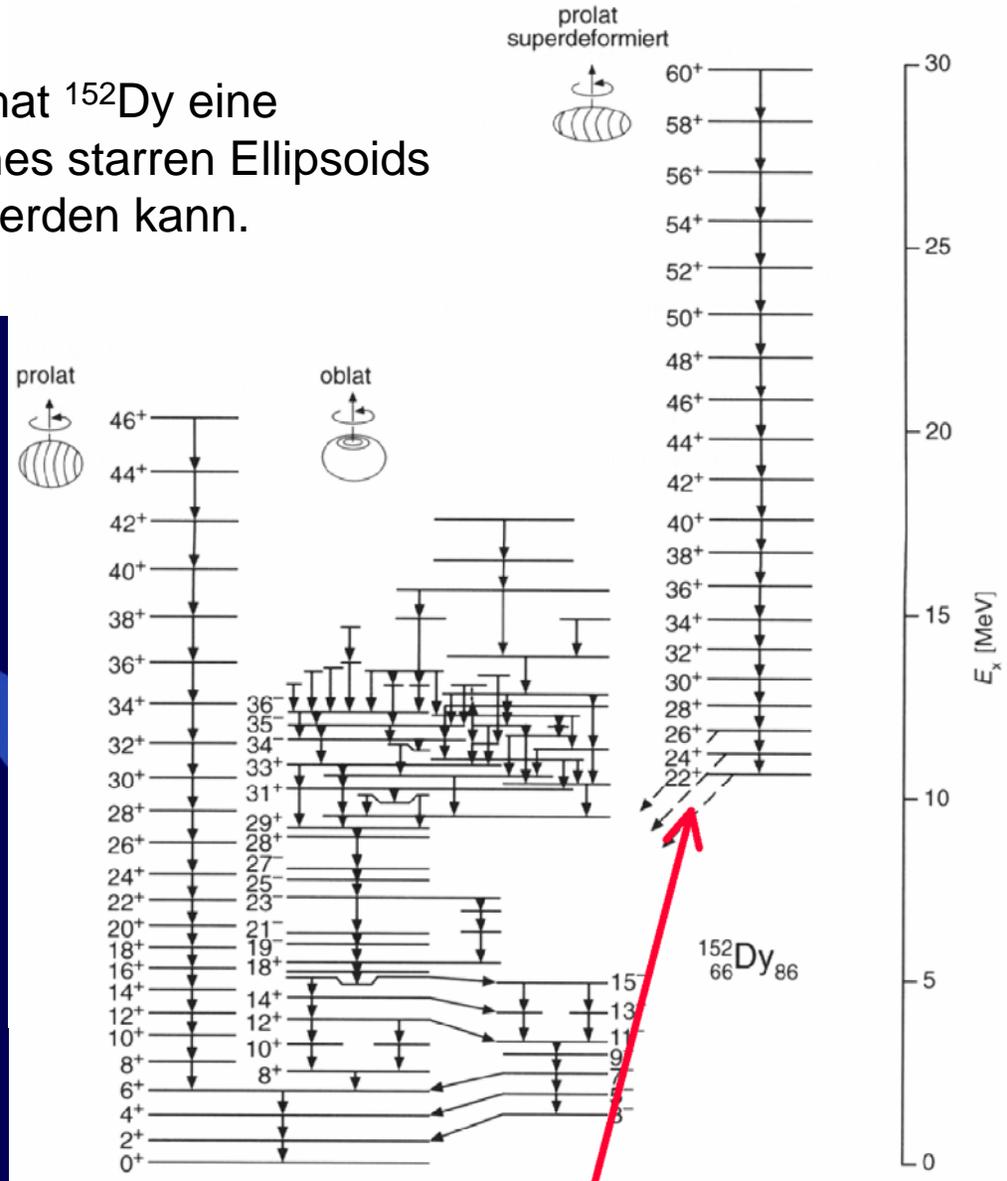
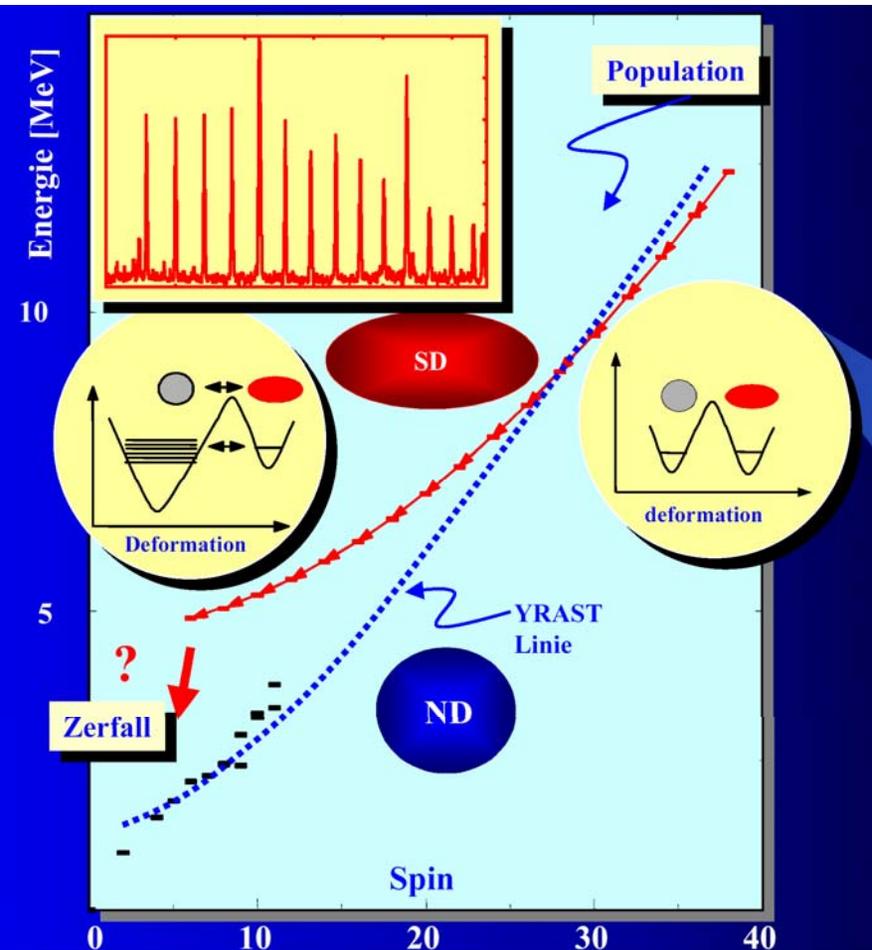
Experiment liegt zwischen den Extremfällen  
Interpretation: Kernmaterie hat eine superfluide Komponente, die durch Paarungskraft entsteht.

Analogie: Cooper-Paare in Supraleitern.

# Rotationen

Superdeformation:

Bei hohen Drehimpulsen ( $J=22 \dots 60$ ) hat  $^{152}\text{Dy}$  eine Rotationsbande, die durch Rotation eines starren Ellipsoids mit dem Achsenverhältnis 2:1 erklärt werden kann.



Wie zerfällt diese Bande?