

## Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- $\alpha$ -Zerfall



# Wiederholung letzte Stunde: Zerfallsgesetz

Beobachtet man eine Probe über eine gewisse Zeit, sinkt ihre Aktivität  $A(t)$ , weil die Zahl der Kerne  $N(t)$  kontinuierlich abnimmt. Einen quantitativen Zusammenhang bekommt man aus  $-dN/dt = N \lambda$

Die Lösung dieser DGL lautet:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = A(t) / \lambda$$

Dabei ist  $N_0$  die Zahl der Kerne bei  $t = 0$ .

Messen kann man  $\lambda$  bei bekanntem  $N$  (quasi konstant) über  $A$  oder, bei kurzlebigen Isotopen, über die Zeitfunktion von  $A(t)$ .

Als Einheit der Aktivität verwendet man das Becquerel Bq:

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfall / s}$$

# $\alpha$ -Zerfall

Beim  $\alpha$ -Zerfall wird ein  $\alpha$ -Teilchen vom radioaktiven Kern emittiert. Ordnungszahl (Atomzahl) wird um zwei (vier) Einheiten reduziert.

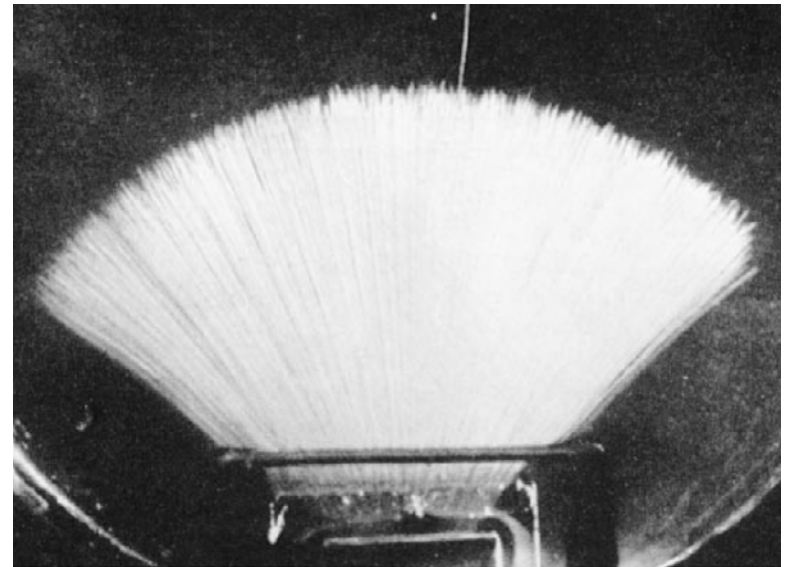
Energiedifferenz der Atommassen:

$$Q = M(Z,A) - M(Z - 2,A - 4) - M(^4\text{He})$$
$$= B(Z - 2;A - 4) + B_{\alpha}(28,3 \text{ MeV}) - B(Z;A):$$

Der Q-Wert einer Reaktion oder eines Zerfalles ist die verfügbare Energie, die sich unter den beteiligten Teilchen als kinetische Energie aufteilt.

Hier ist Q also die kinetische Energie des  $\alpha$ 's und die Rückstossenergie des Tochterkernes. Da Mutter- und Tochter feste Massen haben sind  $\alpha$ 's monoenergetisch. Kinetischen Energien von einigen MeV (4 -10 MeV).

Aufnahme der Ionisationsdichte in einer Nebelkammer. Spuren aus einer kollimierten  $\alpha$ -Quelle ( $^{214}\text{Po} \rightarrow ^{210}\text{Pb} + \alpha$ ). Die konstante Länge der Spuren zeigt, dass die  $\alpha$ 's monoenergetisch sind ( $Q= 7.7 \text{ MeV}$ ).



# $\alpha$ -Zerfall

Protonen und Neutronen sind auch in schweren Kernen mit bis zu 7 MeV gebunden, und können daher nicht aus dem Kern entweichen. Die Emission eines gebundenen Systems ist eher möglich, da zusätzlich Bindungsenergie zur Verfügung steht. Von Bedeutung ist dies insbesondere für  $\alpha$ -Teilchen, da sie eine außerordentlich große Bindungsenergie von 7.1 MeV/u haben.

Atomkerne besitzen eine Coulombbarriere, die ein sich im Kern formiertes Alpha-Teilchen daran hindert, diesen zu verlassen. Das  $\alpha$ -Teilchen müsste dazu eine potentielle Energie besitzen, welche größer als das abstoßende Coulombpotential ist:

$$V_{Coul} = \frac{2(Z-2)e^2}{r} = \frac{2(Z-2)\alpha\hbar c}{r}$$

Klassisch ist es für  $E < V_{Coul}$  unmöglich, diese Barriere zu überwinden; quantenmechanisch besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit für das  $\alpha$ -Teilchen, die Barriere und damit den klassisch verbotenen Bereich zu durchdringen. **Tunneleffekt.**

=> Tafel

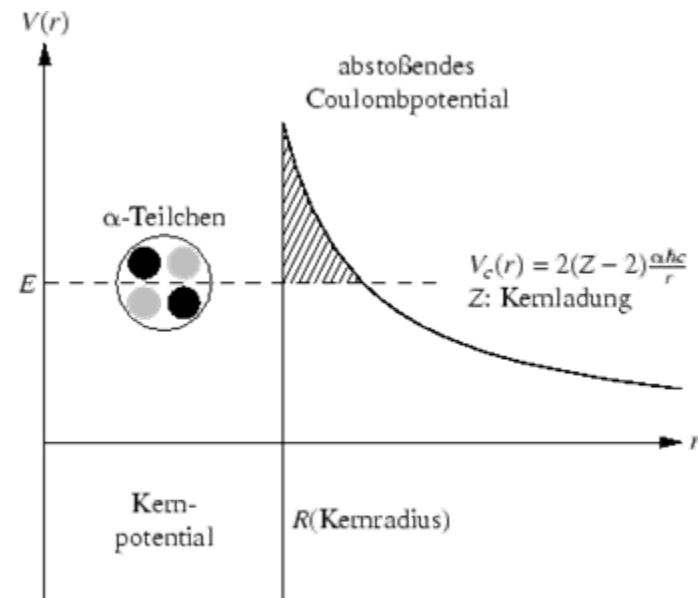


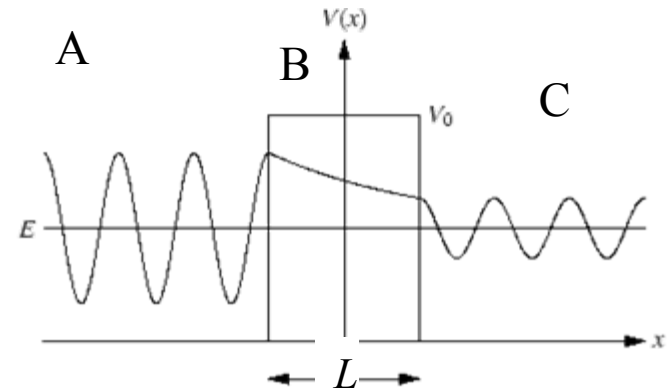
Abb. 12.6: abstoßendes Coulombpotential,  $V_{Coul} = 2(Z-2)(\alpha/r)$

# Tunneleffekt Q.M. Wiederholung I

Quantenmechanik: Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\text{Normierungsbedingung: } \int dx |\psi(x)|^2 = 1$$



Für das positive Potenzial gibt es in der klassischen Mechanik keine gebundenen Zustände.

Betrachten nur Energien unterhalb der Höhe der Barriere. In der klassischen Physik wird ein Teilchen, das sich auf die Barriere zubewegt, total reflektiert. Es kann nicht in das Innere der Barriere eindringen.

Quantenmechanik:  
Allgemeiner Ansatz für Streulösungen in Gebieten A,B,C:

$$\text{A, C: } \psi'' = -k_0^2 \psi, \quad k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$\text{B: } \psi'' = -k^2 \psi, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0)$$

$$\text{A: } \psi_A(x) = \alpha_+ e^{ik_0 x} + \alpha_- e^{-ik_0 x}$$

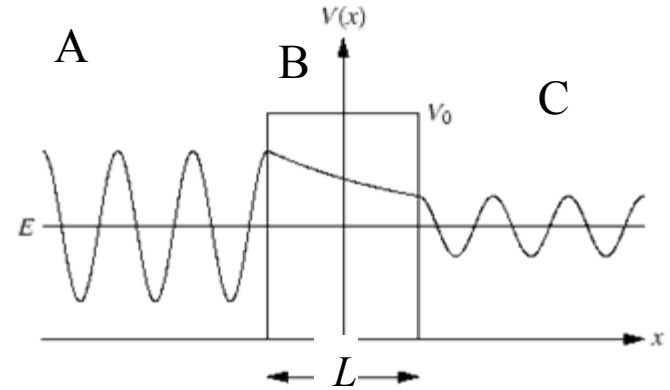
$$\text{B: } \psi_B(x) = \beta_+ e^{ikx} + \beta_- e^{-ikx}$$

$$\text{C: } \psi_C(x) = \gamma_+ e^{ik_0 x} + \gamma_- e^{-ik_0 x}$$

# Tunneleffekt Q.M. Wiederholung II

Betrachte Teilchen das von links einläuft und dann reflektiert und transmittiert wird.

- Im Gebiet C also nur eine nach rechts laufende Welle =>  $\gamma_- = 0$
- Normierung so, daß  $\alpha_+ = 1$



$$\psi_A(x) = e^{ik_0x} + \alpha_- e^{-ik_0x}$$

$$\psi_C(x) = S e^{ik_0x}$$

Die Koeffizienten  $S$  und  $\alpha_-$  haben folgende physikalische Bedeutung:

Betrachten den Teilchenstrom: 
$$j = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \psi' - \psi \psi'^*)$$

Für die ebenen Wellen in A und C gilt:

A:  $e^{ik_0x}$ , einlaufende Welle,  $j_{\text{ein}} = \frac{\hbar k_0}{m}$   
 $\alpha_- e^{-ik_0x}$ , reflektierte Welle,  $j_R = -\frac{\hbar k_0}{m} |\alpha_-|^2$

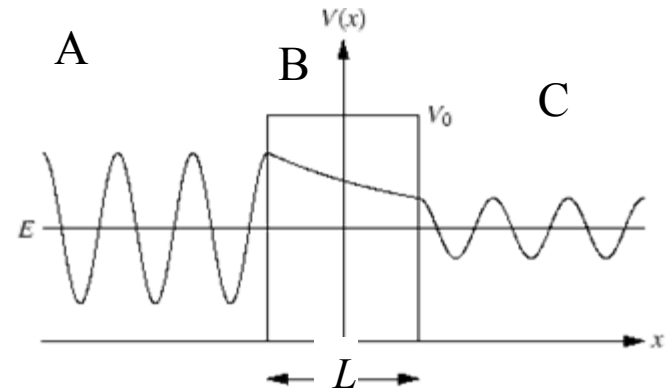
C:  $S e^{ik_0x}$ , transmittierte Welle,  $j_T = \frac{\hbar k_0}{m} |S|^2$ .

Die Wahrscheinlichkeiten für Transmission und Reflexion:

Transmissionskoeffizient:  $T = \left| \frac{j_T}{j_{\text{ein}}} \right| = |S|^2$

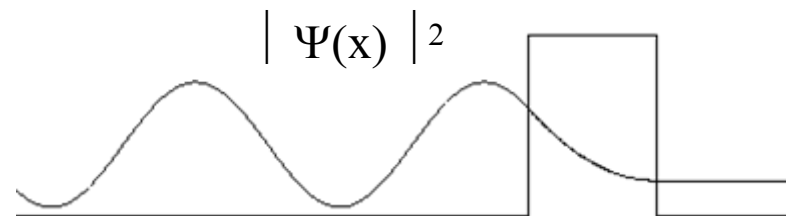
Reflexionskoeffizient:  $R = \left| \frac{j_R}{j_{\text{ein}}} \right| = |\alpha_-|^2$

# Tunneleffekt Q.M. Wiederholung III



Die Transmissionswahrscheinlichkeit  $T(E)$  ist nicht Null. Die Teilchen können also die Barriere durchdringen. Dies ist ein spezifisch quantenphysikalischer Effekt, der in der klassischen Physik keine Entsprechung hat.

Aufenthaltswahrscheinlichkeit:



# $\alpha$ -Zerfall und Tunneleffekt

Quantenmechanik: Tunnelwahrscheinlichkeit lässt sich für ein endliches Kastenpotential exakt berechnen:

$$T(E) = \exp\left(-\frac{2L}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

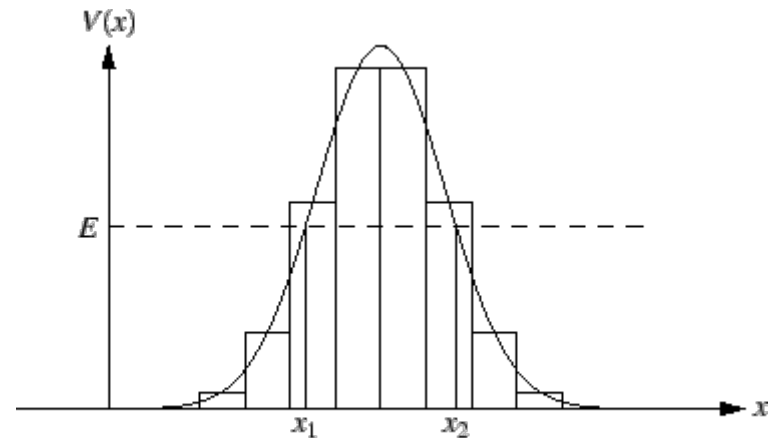
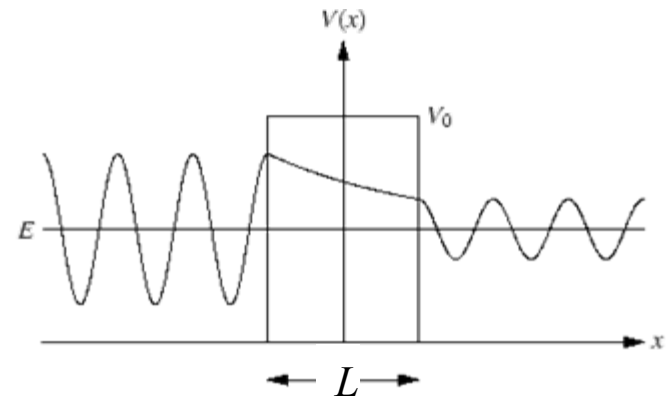
Für einen allgemeinen Potenzialberg ist dies nicht möglich.

Näherungsformel: Zwischen den klassischen Umkehrpunkten wird das Potential in  $n$  kleine Schwellen der Breite  $\Delta x$  zerlegt.

$$T(E) = \prod_{i=1}^n T_i(E) = \exp\left\{-\int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V(x) - E)}\right)\right\}$$

Annahmen:

- Exponentialfaktor ist wesentlich größer als Eins
- *WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) Näherung* für kontinuierliche Potentialberge





# $\alpha$ -Zerfall Zerfallswahrscheinlichkeit

Das  $\alpha$ -Teilchen bewegt sich in einem mittleren Potenzial  $V(r)$  im Tochterkern. Im Inneren des Kern ist  $V_0$  konstant, außerhalb des Kernradius  $R$  ist es ein reines Coulomb-Potenzial

Beispiel  $^{238}\text{U}$  (Vorgriff):

$-V_0 \sim -100 \text{ MeV}$   $R = \sim 10 \text{ fm}$

Ansatz für die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit  $\lambda$ :

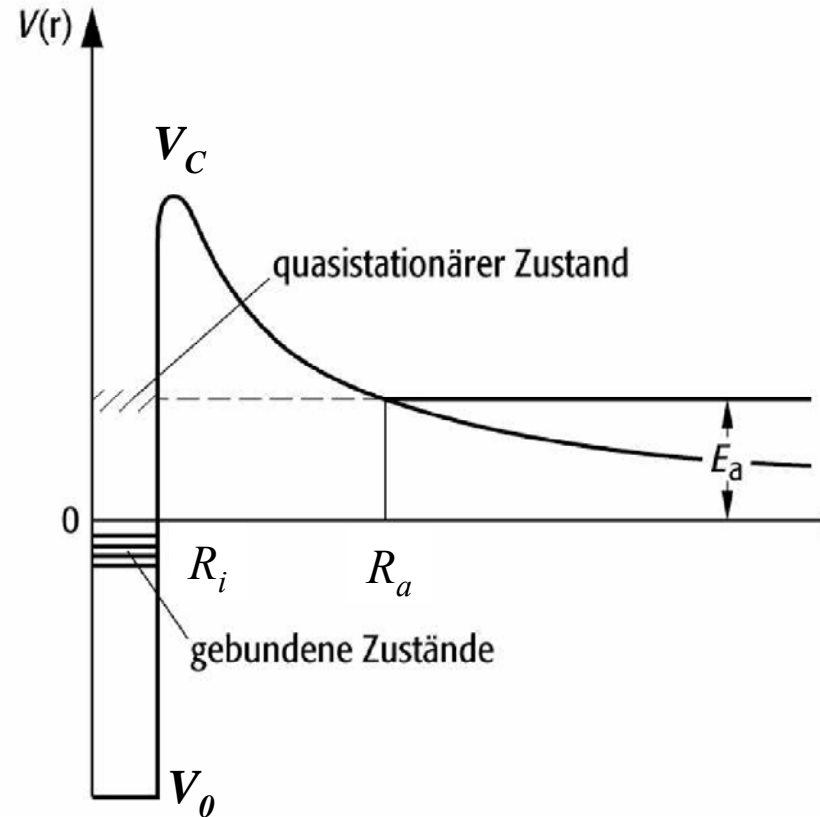
$$\lambda = S \cdot \omega \cdot P$$

- $S$  Wahrscheinlichkeit daß sich bereits im Kerninneren ein  $\alpha$ -Teilchen gebildet hat

- $\omega$  Frequenz, mit der das Teilchen an die Barriere stößt:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{2R} = \frac{\sqrt{2V_0 / M}}{2R}$$

- $P$  ist die Penetrabilität, die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozess.



Bemerkung:

Das  $\alpha$ -Teilchen kann im Kern auch Bahndrehimpuls  $l$  tragen. Diesen Vernachlässigen wir im folgenden, d.h. es gilt nur für Zerfälle zwischen Grundzuständen mit  $l=0$ .

# $\alpha$ -Zerfall Zerfallswahrscheinlichkeit

$P$  ist die Penetrabilität,  
Wahrscheinlichkeit für  
Tunnelprozess:

Nebenrechnung:

$P = e^{-2G}$  mit Gamow Faktor  $G$

$$G(E_\alpha) = \int_{R_i}^{R_a} dr \left( \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V(r) - E)} \right)$$

$$\text{mit } V(R_a) = E_\alpha = \frac{2Ze^2}{R_a}$$

$$\begin{aligned} G(E_\alpha) &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int_{R_i}^{R_a} dr \sqrt{\frac{2Ze^2}{r} - E} \\ &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} 2Ze^2 \left\{ \arccos \sqrt{\frac{R_i}{R_a}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_a} - \frac{R_i^2}{R_a^2}} \right\} \end{aligned}$$

Coulombpotential

‚dicke‘ Barriere

$$\text{beachte } \frac{R_i}{R_a} = \frac{E_\alpha}{V_c}$$

für  $E_\alpha \ll V_c$  bzw.  $R_a \gg R_i$  gilt

$$\left\{ \arccos \sqrt{\frac{R_i}{R_a}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_a} - \frac{R_i^2}{R_a^2}} \right\} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R_i}{R_a}}$$

# $\alpha$ -Zerfall Geiger-Nuttall Gesetz

Für den Logarithmus der Zerfallskonstante gilt das Geiger-Nuttall'sche Gesetz:  
Zusammenhang zwischen Halbwertszeit und Energie der  $\alpha$ -Teilchen

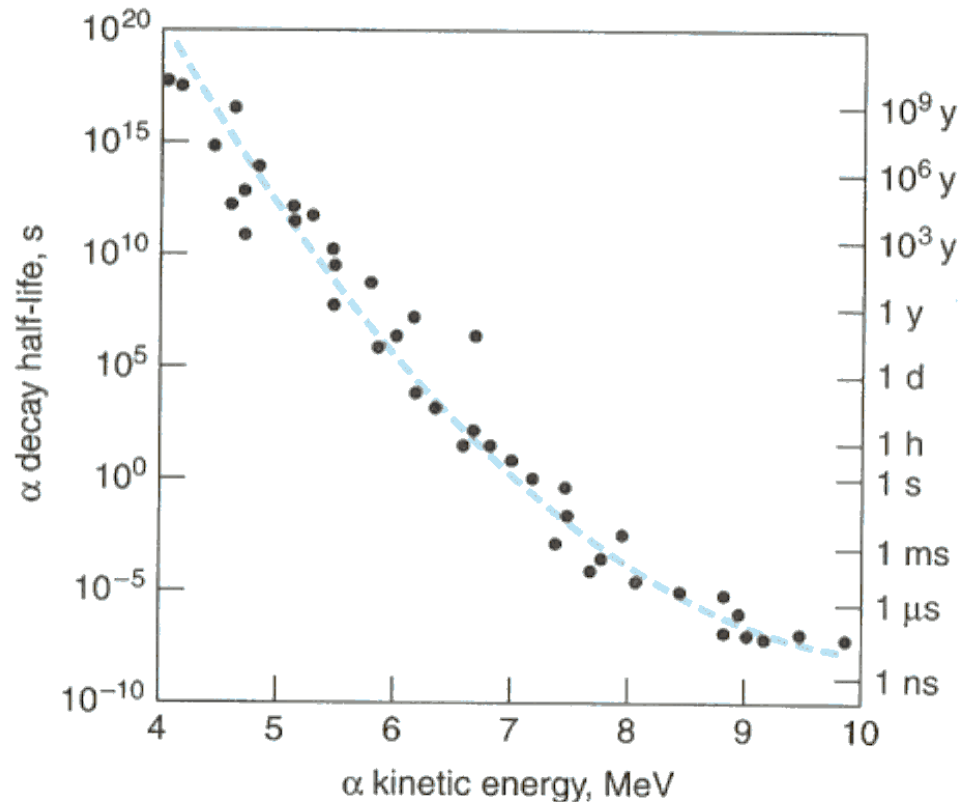
$$\begin{aligned}\ln \lambda &= \ln S - \ln \Delta t - 2G(E_\alpha) \\ &= b(Z) - a \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} \approx -a \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}}\end{aligned}$$

S -  $\alpha$ -Formation

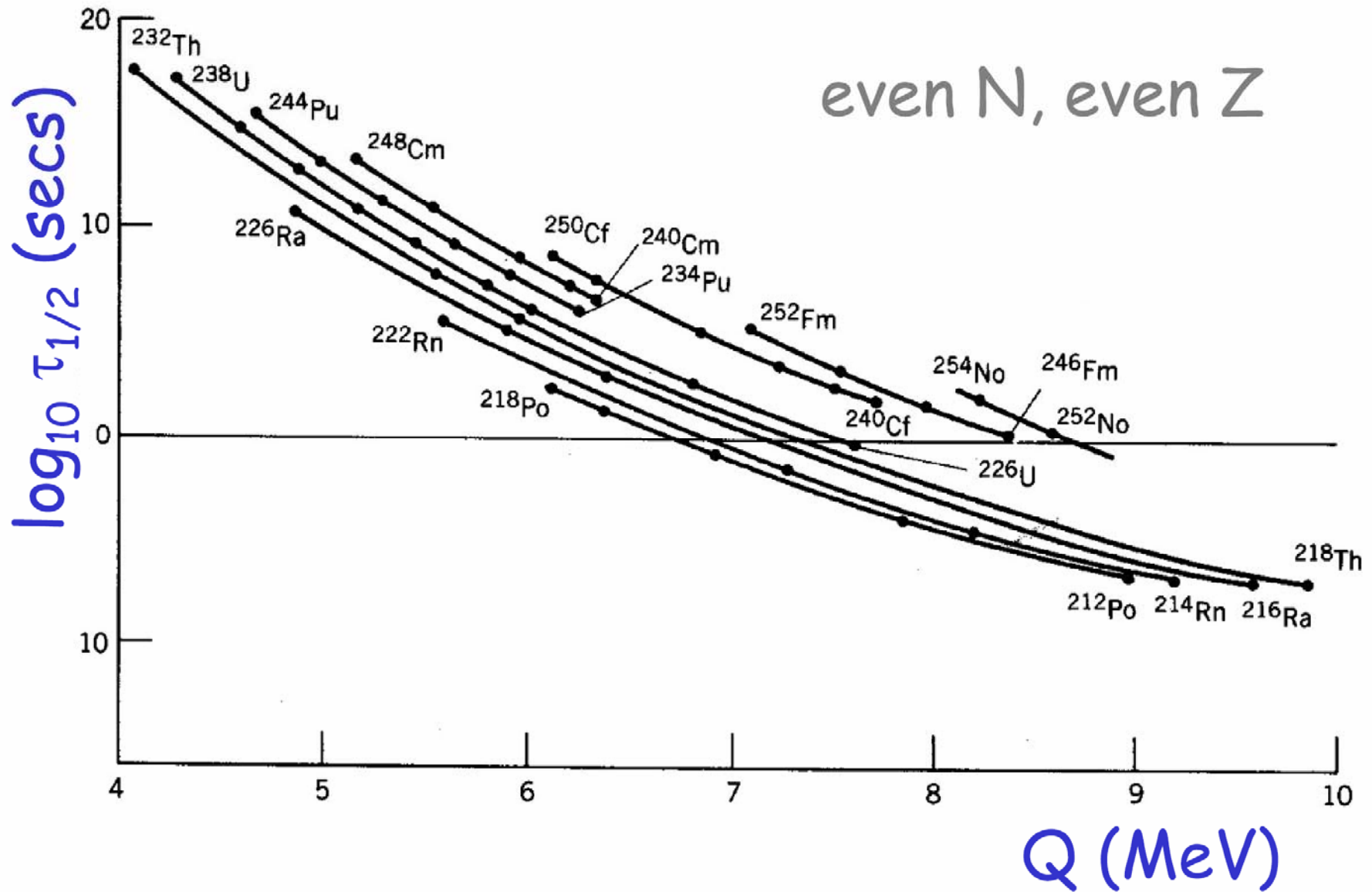
$\Delta t$  - Frequenz des  $\alpha$  im Kern

P - Gamow-faktor

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \ln 2 \cdot \tau$$

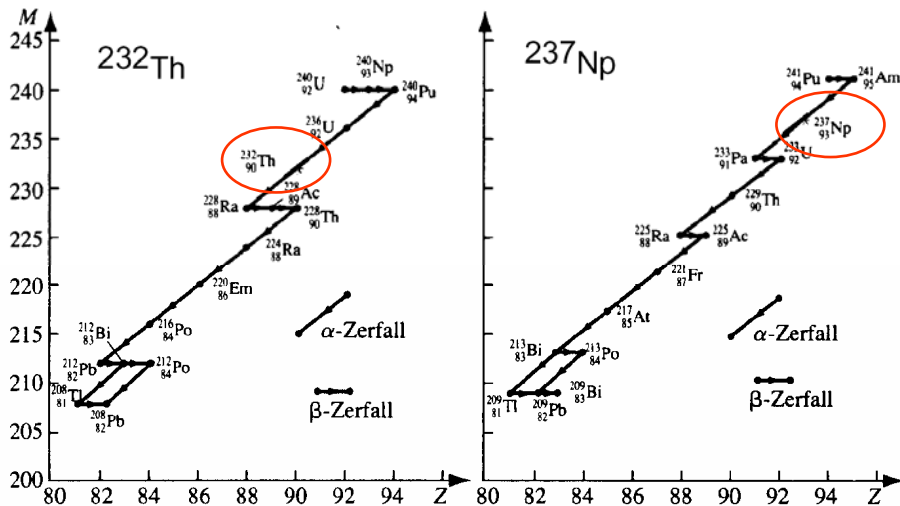


# Geiger-Nuttall Gesetz

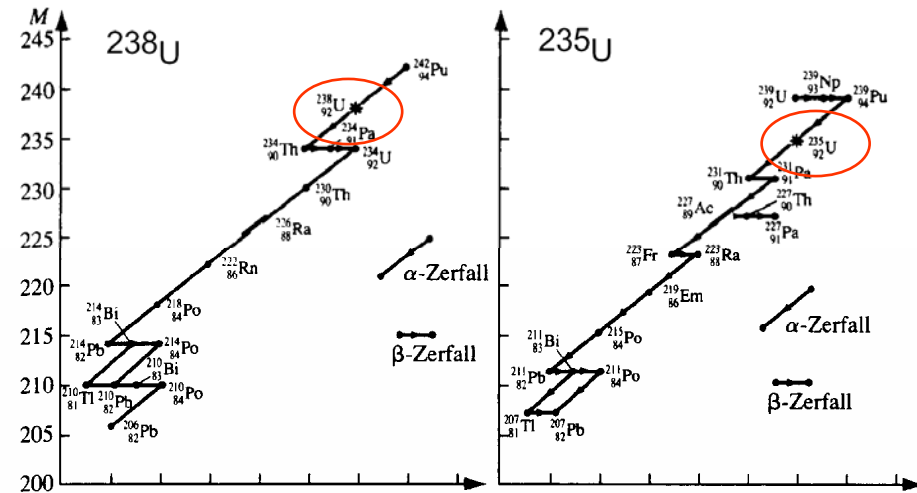


# $\alpha$ -Zerfallsreihen

$A$	Reihe	Mutterkern	$t_{1/2}$
$4n$	Thorium	$^{232}\text{Th}$	$1,40 \cdot 10^{10}$ a
$4n + 1$	Neptunium	$^{237}\text{Np}$	$2,14 \cdot 10^6$ a
$4n + 2$	Uranium	$^{238}\text{U}$	$4,47 \cdot 10^9$ a
$4n + 3$	Aktinium	$^{235}\text{U}$	$7,04 \cdot 10^8$ a

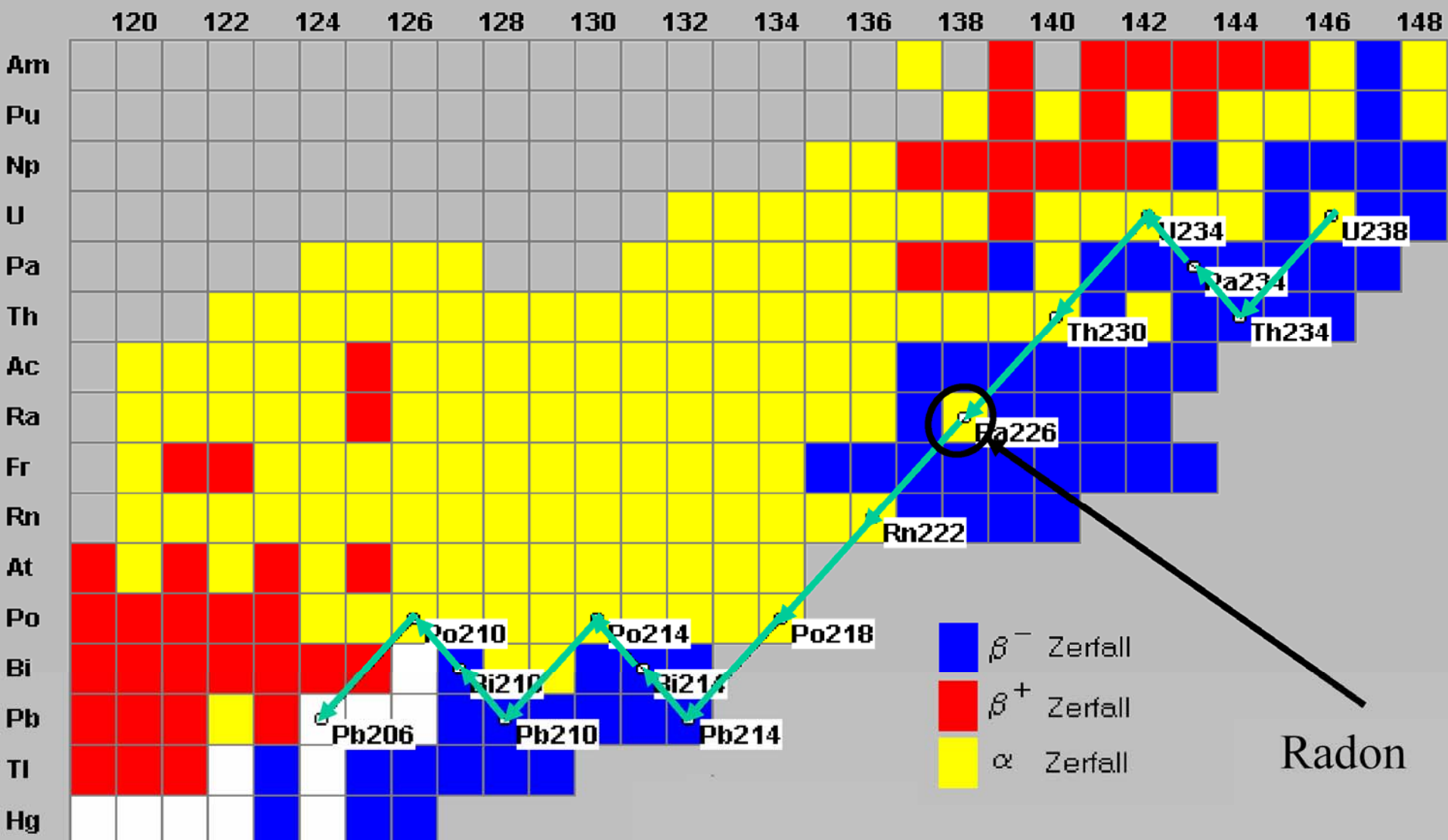


**Kurze Halbwertszeit**



# $\alpha$ -Zerfallsreihen

## Zerfall von $^{238}\text{U}$



# Zusammenfassung

**Weizsäcker Massenformel:** Stabile, in der Natur vorkommende Kerne bilden ein schmales Band in der N-Z-Ebene der Nuklidkarte.

Für sehr neutronenarme bzw. -reiche Kerne definiert die Bedingung  $B_n = 0$  bzw.  $B_p = 0$  die sog. **'Abbruchkanten'**.

Die Nuklide von Fe und Ni besitzen die höchste Bindungsenergie pro Nukleon.

Bedingung für einen Zweikörperzerfall:  $M(A,Z) > M(A-A', Z-Z') + M(A', Z')$

**$\alpha$ -Zerfall:** Tunnelprozess durch die Coulombbarriere des Kernpotentials

