Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- Spin und Parität
- β-Zerfall (Teil II)

Motivation
Für die Beschreibung der Element-synthese in astrophysikalischen Umgebungen sind insbesondere gute Kenntnisse über die β-Zerfalls-Eigenschaften von instabilen Kernen fernab vom Tal der Stabilität nötig.

http://www.ikp.uni-koeln.de/groups/reiter/files/physik6/

Zusammenfassung letzte Stunde

β^- - Zerfall

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$$
$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e$$

β^+- Zerfall

$$p \to n + e^+ + \nu_e$$
$$u \to d + e^+ + \nu_e$$

- β^- - Zerfälle sind möglich falls: ***M(A,Z) > M(A,Z+1)***

- β^+ - Zerfälle sind möglich falls: ***M(A,Z) > M(A,Z-1) + 2m$_e$***

Der Term $2m_e$ berücksichtigt, daß ein Positron gebildet wird und ein Elektron vom Mutteratom übrig ist.

- Elektroneneinfang (electron capture; EC)

In Konkurrenz zum β^+-Zerfall, kann der Elektroneneinfang-Prozeß energetisch günstiger Protonen in Neutronen umwandeln: $p + e^- \to n + \nu_e$

Bedingung für Zerfall: ***M(A,Z) > M(A,Z-1) + ε***

ε ist Anregungsenergie des Lochs im Tochteratom.

Kinematik beim β-Zerfall

Kinematik

Q = Energiegewinn beim Zerfall

$\Rightarrow \underline{Q > 0}$ Zerfall ist möglich

$\beta^{\pm}$ $\quad Q = m_X - m_Y - m_e - m_\nu$ Kernmassen

e.c. $\quad Q = m_X - m_Y + m_e - m_\nu$ $\quad m_{e-} \approx m_{e+}$

$$M(A,Z) = m(A,Z) + Zm_e$$

Atom massen Kern massen

β^- $\quad Q = M_X - M_Y - m_\nu$ Atommassen

β^+ $\quad Q = M_X - M_Y - 2m_e - m_\nu$

e.c. $\quad Q = M_X - M_Y - m_\nu$

Spin und Parität

Der Kern ist ein abgeschlossenes System und hat somit einen definierten Drehimpuls oder Spin mit der Quantenzahl J für den Kernspin.

$$|J| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$$

$$m_J = -J, -(J-1), \ldots, J-1, J$$

Kernspin ist die Summe der Gesamtdrehimpulse der individuellen Nukleonen: j

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i \qquad \text{(jj-Kopplung)}$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Nukleons ist die Summe des intrinsischen Spins und des Bahndrehimpulses:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

- intrinsischer Spin des Protons oder Neutrons: $s = 1/2\hbar$
- der Bahndrehimpuls eines Nukleons ist immer geradzahlig

Daraus folgt: gerade Massenzahl A: J = ganzzahlig
ungerade Massenzahl A: J = halbzahlig
Alle Kerne mit geradem Z und geradem N haben $J = 0$

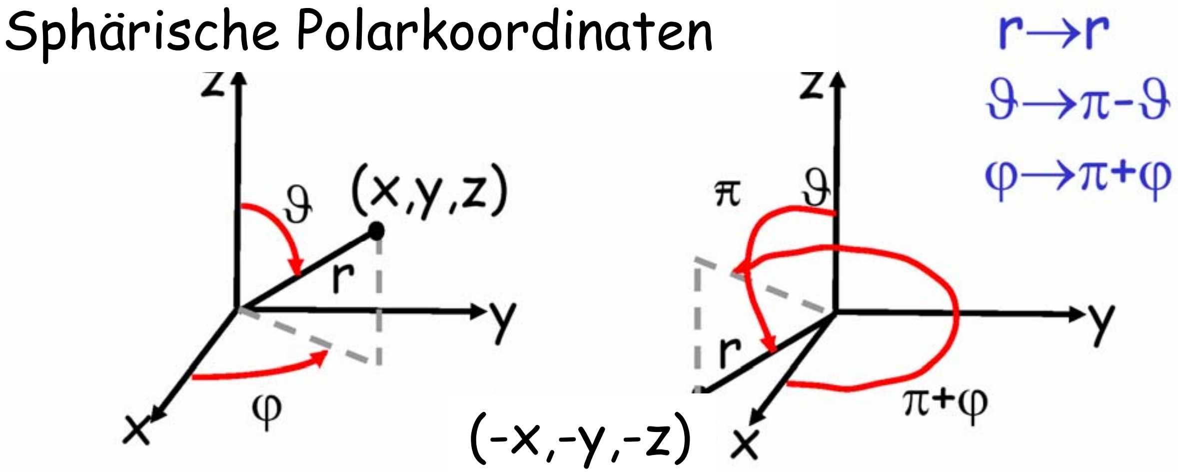
Spin und Parität

In einem symmetrischen Potential $V(r)=V(-r)$ haben die Wellenfunktionen eine **definierte Parität.**

$$\Psi(\vec{r}) = +\Psi(-\vec{r}) \qquad \text{positive Parität}$$

$$\Psi(\vec{r}) = -\Psi(-\vec{r}) \qquad \text{negative Parität}$$

Sphärische Polarkoordinaten



$$\Psi_{nlm_l}(r,\pi-\vartheta,\pi+\varphi) = (-1)^l\, \Psi_{nlm_l}(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\left[\Psi(\vec{r})\right]^2 = \left[\Psi(-\vec{r})\right]^2$$

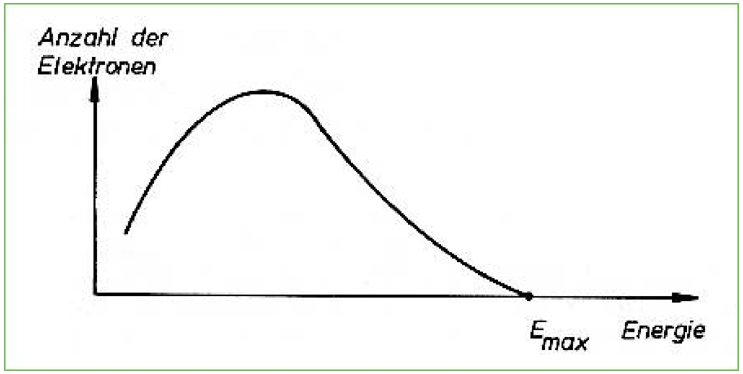
Gilt für alle Kernwellenfunktionen

Nomenklatur für Kernzustände: Spin und Parität

0^+ (Spin:0 Parität: gerade)
$5/2^-$ (Spin:5/2 Parität: ungerade)

Paulis Neutrinohypothese

In den ersten Experimenten zu β-Zerfällen hat man nur das emittierte Elektron beobachtet. Wegen des großen Massenunterschieds ist die Rückstoßenergie des Tochterkerns sehr klein. z.B. Energie des emittierten Elektrons aus Messungen mit einem Magnetspektrometer.



Ergebnis: ein kontinuierliches Energiespektrum des Elektrons.

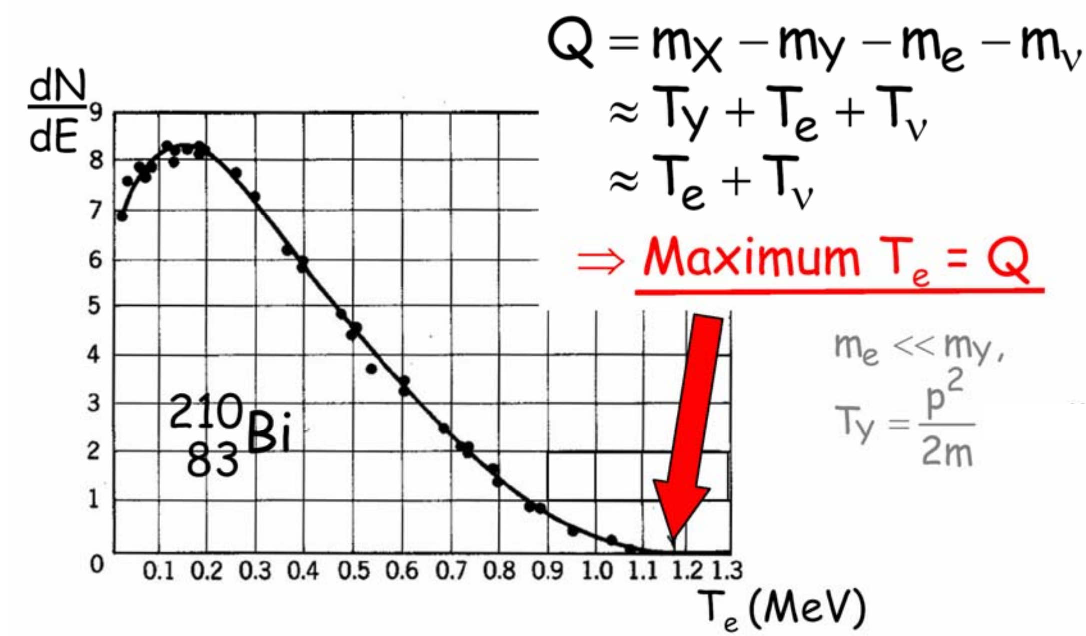
Problem: Bei einem Zweiteilchen-Zerfall müssen die beiden entstehenden Teilchen auf Grund des Energiesatzes eine wohl definierte Energie haben. Auch die Erhaltung des Impulses und des Drehimpulses ist nicht erfüllt. Die Kerne X und Y haben gemeinsam entweder ganz- oder halbzahligen Spin. Da das Elektron den Spin 1/2 hat, stimmt die Bilanz nicht.

Neutrinohypothese von W. Pauli (1930): Neben dem Elektron wird ein weiteres Teilchen, nämlich ein (Anti)-Neutrino abgestrahlt. Das Neutrino muß elektrisch neutral sein, halbzahligen Spin haben und sehr leicht sein.

Dreikörperzerfall löst alle Probleme.

Zerfallsspektrum des β⁻Zerfalls

Die Zerfalls-Energie bei β⁻Zerfall ist die Differenz der Masse des Mutterkerns und der Tochter:



Diese Energie verteilt sich auf die kinetischen Energien der emittierten Teilchen, das Elektron und das Antineutrino (vernachlässigbare kinetische Rückstoßenergie der Tochter).

Das Spektrum des Elektrons ist kontinuierlich. Es reicht von der Energie 0 bis zu einer maximalen Energie
$E_{max} = E_0 - m_\upsilon c^2$ (= Q)

(vernachlässigen im folgenden auch die sehr kleine Masse des Antineutrinos. Das Neutrino hat aber eine Masse!)

β-Zerfälle haben große Lebensdauer und geringe Zerfallswahrscheinlichkeit, die Wechselwirkung die dies bewirkt ist sehr klein gegenüber den anderen Wechselwirkungen im Kern d.h. zeitabhängige Störungstheorie ist gute Näherung.

Fermis goldene Regel

Fermi's goldene Regel

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \left\langle \Psi_f \middle| H_{\text{int}} \middle| \Psi_i \right\rangle \right|^2 \cdot \rho(E')$$

Zerfalls- und Reaktionsraten sind bestimmt durch das Übergangsmatrixelement und die Dichte der Endzustände.

Beispiel aus der Atomphysik:
Beim Übergang von einem Anfangszustand $|\Psi_i>$ in einem Endzustand $|\Psi_f>$ unter Emission eines Photons mit der Energie $E_\gamma = \hbar\omega$ ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit W_{fi} (d.h. die Zerfallsrate) gegeben durch:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \left\langle \Psi_f \middle| V \middle| \Psi_i \right\rangle \right|^2 \cdot \delta(E_i - E_f - E_\gamma)$$

E_i und E_f Energie des Anfangs- und des Endzustands
E_γ Energie des emittierten Photons.
$<\Psi_f|V|\Psi_i>$ Matrixelement des Wechselwirkungsoperators, der Übergang bewirkt.
• Matrixelement muß klein sein gegenüber den Energieabständen des Systems. (sonst keine Störungstheorie möglich)
• Für Emission des Photons aus einem Atom ist V die elektromagnetische Wechselwirkung der Hüllenelektronen mit dem Photon.

Beispiel aus der Atomphysik

Beispiel aus der Atomphysik:
Endzustand mit kontinuierlichem Energiespektrum: man mißt kontinuierliches Photonenspektrum.

Zerfallsrate pro Energieintervall: die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit $W_{fi}(E_\gamma)\,dE_\gamma$ daß ein Photon mit der Energie zwischen E_γ und $E_\gamma + dE_\gamma$ emittiert wird.
Summation über alle Endzustände, die im Energieintervall der Größe dE_γ liegen.
Dies sind $\rho_f\,dE_\gamma$ Zustände, wobei ρ_f die Zustandsdichte des Endsystems ist.

Zerfallsrate für Zerfall unter Emission eines Photons mit der Energie zwischen E_γ und $E_\gamma + dE_\gamma$

$$W_{fi}(E_\gamma)dE_\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left| \left\langle \Psi_f \middle| V \middle| \Psi_i \right\rangle \right|^2 \cdot \delta(E_i - E_f - E_\gamma)\rho_f dE_\gamma$$

Integration über alle Energien E_γ ergibt Zerfallsrate.

Zurück zum β^--Zerfall

Spektrum der emittierten Elektronen aus β-Zerfall
d.h. die Zahl der Zerfälle $W_{fi}(E_e)$ pro Zeit- und Energieeinheit.

Zwei emittierte Teilchen, das Elektron und das Antineutrino
Zerfallsrate für Zerfall unter Emission eines Elektrons mit der Energie E_e und $E_e + dE_e$
und eines Antineutrinos mit der Energie zwischen E_ν und $E_\nu + dE_\nu$

$$W_{fi}(E_e, E_{\bar{\nu}})dE_e dE_{\bar{\nu}} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \left|\left\langle \Psi_f \middle| V \middle| \Psi_i \right\rangle\right|^2 \cdot \delta(E_0 - E_R - E_e - E_{\bar{\nu}})\rho_f dE_e dE_{\bar{\nu}}$$

E_0 Zerfallsenergie
E_R Rückstoßenergie des Kerns, wegen der großen Masse sehr klein, wird vernachlässigt.
ρ_f Dichte der Endzustände
$< \Psi_f | V | \Psi_i >$ Matrixelement der schwachen Wechselwirkung

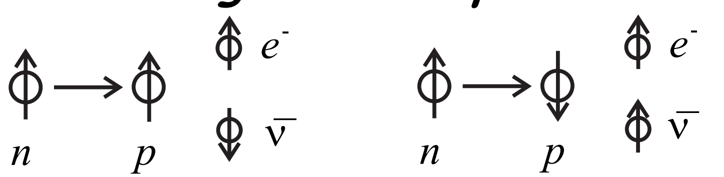
Die Energieabhängigkeit des Spektrums wird durch die Niveaudichte der Endzustände ρ_f bestimmt. Fermi extrahierte die Form des Spektrums bereits aus Überlegungen zur Niveaudichte.

β^-Zerfallspektrums: Drehimpulse

Im folgenden wird wieder vom Spin abgesehen d.h. Wir betrachten nur Übergange von einem Zustand mit Drehimpuls 0 im Mutterkern zu einem Zustand mit Drehimpuls 0 im Tochterkern.

Elektron-Antineutrino-System ist dann im einfach entarteten Singulett-Zustand mit Gesamtspin 0.

Bemerkung zu den Spins



Fermi-Übergang   Gamow-Teller-Übergang

β^- Zerfallspektrums: Niveaudichte, Phasenraum

Zahl der Endzustände im Phasenraum:

$$dN_e dN_{\bar{\nu}} = \frac{V^2 d^3 p_e d^3 p_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^6} = \frac{V^2 p_e^2 dp_e d\Omega_e p_{\bar{\nu}}^2 dp_{\bar{\nu}} d\Omega_{\bar{\nu}}}{(2\pi\hbar)^6}$$

- V ist Normierungsvolumen für die ebenen Wellen,
- hebt sich später gegen die Normierung der Elektron- und Antineutrino-Wellenfunktionen im Matrixelement auf

$-(2\pi\hbar)$ Größe der Quantisierungszelle im eindimensionalen Phasenraum.

β^-Zerfallspektrums: Zerfallsrate

Für Absolutbeträge der Impulse p_e und $p_{\bar{\nu}}$ gelten die relativistischen Energie - und Impulsrelationen :

$$E_e = \sqrt{p_e{}^2 c^2 + m_e{}^2 c^4} \qquad \text{und} \qquad E_{\bar{\nu}} = p_{\bar{\nu}} c$$

$$p_e dp_e = E_e dE_e / c^2 \qquad \text{und} \qquad dp_{\bar{\nu}} = dE_{\bar{\nu}} / c$$

Zahl der Zustände im Energieinterval dE_e und $dE_{\bar{\nu}}$ durch Raumwinkelintegration

$$\rho_f dE_e dE_{\bar{\nu}} = \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 p_{\bar{\nu}}^2 dp_e dp_{\bar{\nu}} = \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^6} E_e \sqrt{E_e{}^2 - m^2 c^4}\, E_{\bar{\nu}}^2 dE_e dE_{\bar{\nu}}$$

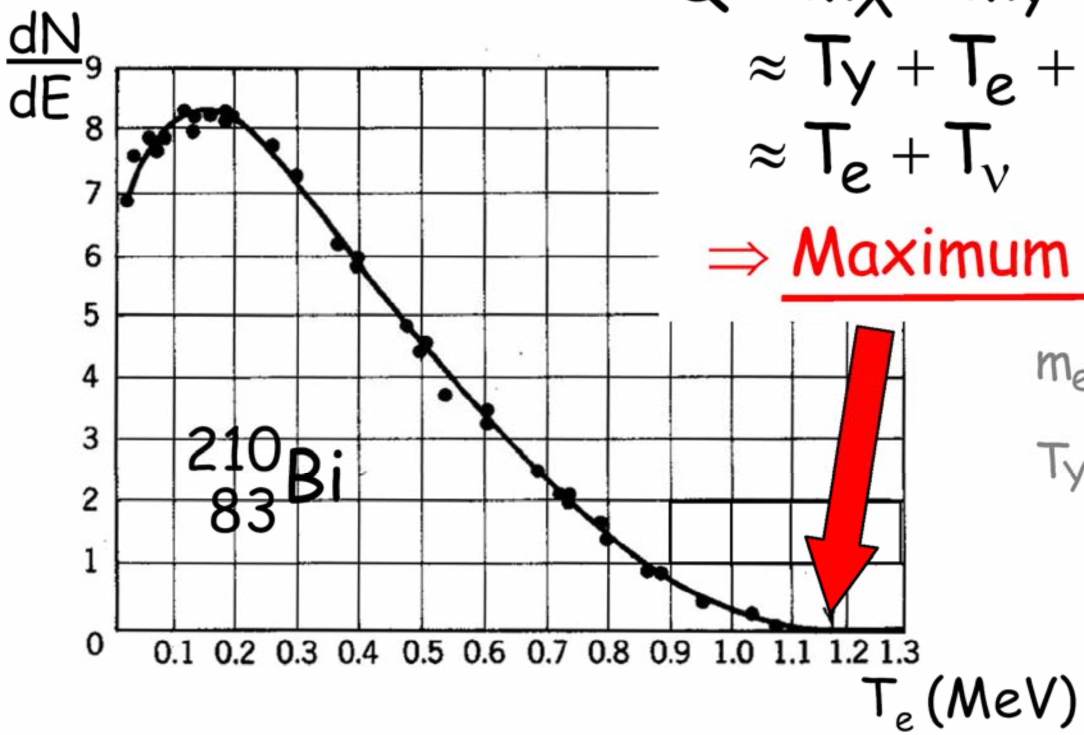
Da man das Antineutrino nicht mißt, erhält man aus $E_{\bar{\nu}} = E_0 - E_e$ nach Integration über die Energie des Antineutrinos $E_{\bar{\nu}}$ die Zerfallsrate für einen Zerfall unter Emission eines Elektrons mit der Energie zwischen E_e und $E_e + dE_e$

$$W_{fi}(E_e) dE_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | V | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^6} E_e \sqrt{E_e{}^2 - m^2 c^4}\, (E_0 - E_e)^2 dE_e$$

β⁻Zerfallspektrums: Phasenraum

Der Phasenraumfaktor $E_e\sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4}(E_0 - E_e)^2$

der sich aus Niveaudichte ergibt, bestimmt die Form des Energiespektrums im wesentlichen!



$$Q = m_X - m_Y - m_e - m_\nu$$
$$\approx T_Y + T_e + T_\nu$$
$$\approx T_e + T_\nu$$

$\Rightarrow$ Maximum $T_e = Q$

$m_e \ll m_Y$, $T_Y = \frac{p^2}{2m}$ small