

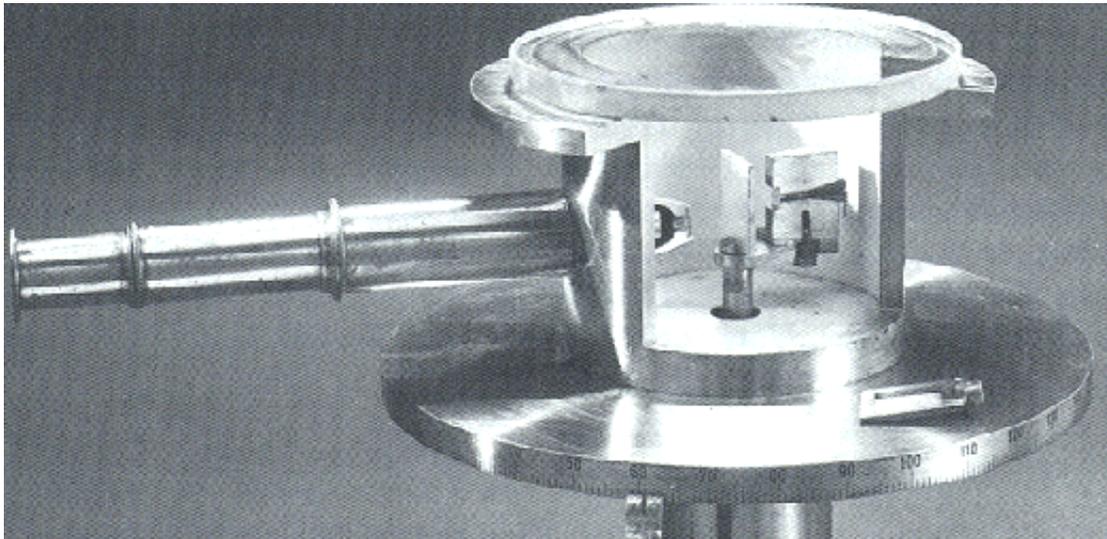
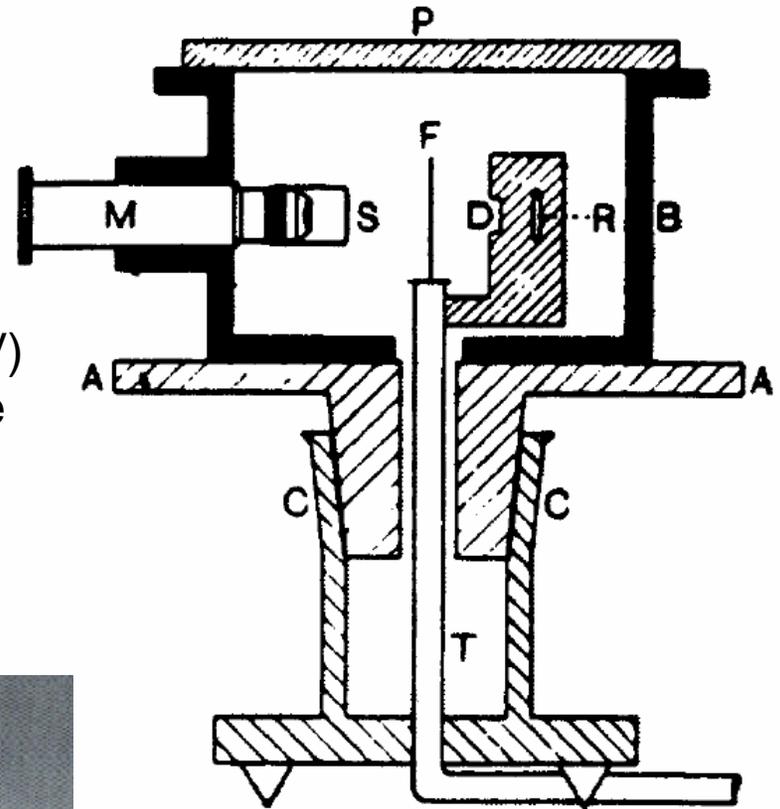
Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- Rutherford-Streuung
- Wirkungsquerschnitt



Rutherford-Streuung

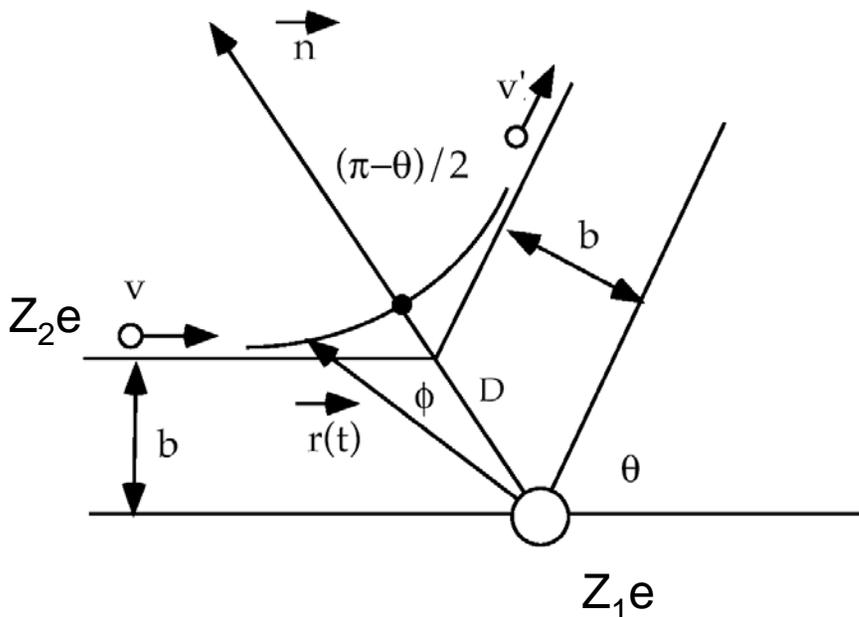
Geiger und Marsden, zwei Mitarbeiter von Rutherford, untersuchten α -Streuung an dünnen Folien an der Universität Manchester. Die Apparatur bestand aus einer evakuierten Kammer, einer kollimierten Ra-Quelle R (kinetische Energie der α -Teilchen $T = 4.78$ MeV) und einem ZnS Szintillator S, der um eine dünne Gold- oder Silberfolie F im Zentrum der Kammer geschwenkt werden konnte.



Rutherford-Streuung Wiederholung

Klassische Beschreibung der Streuexperimente durch Rutherford

- Target und Projektil punktförmig mit Ladungen $+Z_1e$ bzw. $+Z_2e$.
- Elektromagnetische Wechselwirkung (Coulombkraft)
- Keine Spins, keine magnetischen Momente der Streupartner
- Keine Targetanregung (elastische Streuung)
- Target (Au) ist viel schwerer als Projektil ^4He (Masse m , Geschwindigkeit v), Rückstossenergie vernachlässigbar, sonst Rechnung im Schwerpunktsystem



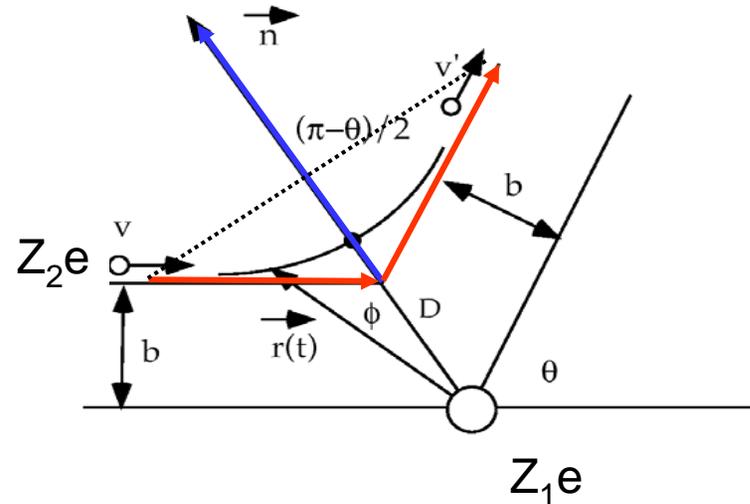
Drehimpulssatz

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvb = m\omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \quad \frac{d\phi}{vb} = \frac{dt}{r^2}$$

Senkrechte Abstand zur Strahlachse:
 b – Stoßparameter, impact-Parameter

Rutherford-Streuung



Betrachte Impuls relativ zu Achse \vec{n}

vor dem Stoß: $-mv \sin \theta/2$

nach dem Stoß: $+mv \sin \theta/2$

Impulsänderung:

$$\Delta p = 2mv \sin \theta/2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r^2} \cdot \cos \phi dt$$

Drehimpulserhaltung:

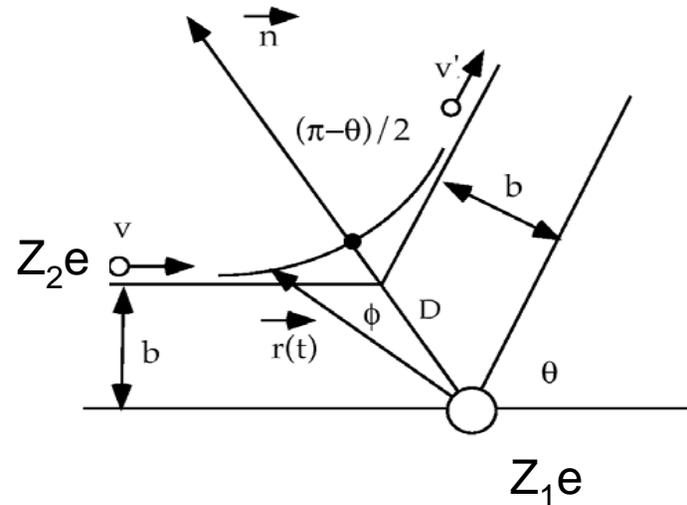
$$\Delta p = \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{vb} \cdot \cos \phi d\phi$$

Drehimpulserhaltung:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvb = m\omega r^2 = m \frac{d\phi}{dt} r^2$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{vb}{r^2} \quad \frac{d\phi}{vb} = \frac{dt}{r^2}$$

Rutherford-Streuung



$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

$$\Delta p = \int_{-(\pi-\theta)/2}^{(\pi-\theta)/2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{vb} \cdot \cos \phi d\phi = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{vb} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \frac{1}{b} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{mv^2} \frac{1}{b}$$

Beziehung zwischen Stoßparameter und Streuwinkel ist die **Ablenkfunktion**.

Für den Vergleich der Rechnung mit den Ergebnisse von Rutherford benötigt man jedoch die Zählrate als Funktion des Streuwinkels.

Wirkungsquerschnitt

Wirkungsquerschnitt WQ

Der Wirkungsquerschnitt entspricht der Fläche, die ein Projektil treffen muß, um eine bestimmte Reaktion auszulösen.

WQ ist verknüpft mit der **Wahrscheinlichkeit**, daß in einem Streuexperiment eine Wechselwirkung eintritt.

WQ ist abhängig von: - Energie

- Art der Wechselwirkung

- an der Reaktion beteiligten Streupartnern

Anschauliche Interpretation: "Wirksame" **Fläche** eines Kerns, die zu Reaktion führt.

Grobe Abschätzung: Geometrische Fläche

Einheit: 1 barn (b) = 10^{-28} [m²]

1 millibarn (mb) = 10^{-27} [cm²]

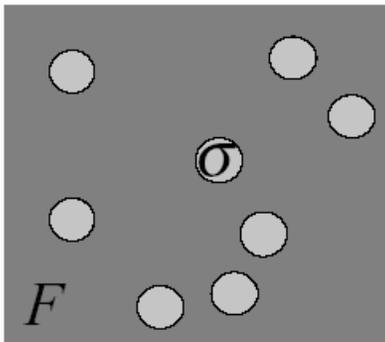
Geometrische Wahrscheinlichkeit für Reaktion

$$P = \frac{N \cdot \sigma}{F}$$

N Anzahl der Streuzentren

F Fläche

σ Wirkungsquerschnitt



Totaler Wirkungsquerschnitt

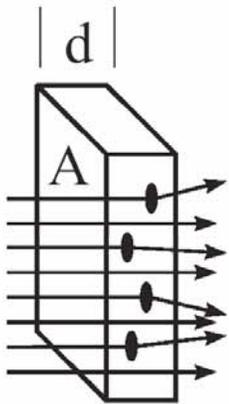
$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/Zeit} \cdot \text{Streuzentren/Fläche}} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a \cdot N_b / A} = \frac{\dot{N}}{I_a \cdot N_b^F}$$

Strahl
Target
Strom
**Flächen
dichte**

Die Targetfläche fällt bei der Berechnung heraus, wenn man die Anzahl der Streuzentren in der Targetfolie berechnet.

Voraussetzung: dünne Folie, Streuzentren überlappen nicht bzw schirmen sich nicht ab.

Definitionen:



- n_a : Teilchendichte im Strahl
- N_a : Teilchenanzahl im Strahl
- v_a : Strahlgeschwindigkeit
- n_b : Streuzentrendichte im Target
- N_b : Streuzentrenanzahl im Target
- A : Querschnittsfläche des Targets
- d : Dicke des Targets

$$\dot{N}_a = I_a : \text{Teilchenstrom im Strahl} = \text{Teilchen/Zeit}$$

$$\Phi_a = \dot{N}_a / A : \text{Teilchenfluß} = \text{Teilchen/Zeit} \cdot \text{Fläche}$$

$$N_b = n_b A d$$

$$N_b^F = N_b / A : \text{Flächendichte der Streuzentren im Target}$$

Reaktionsrate im Target :

$$\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b = I_a N_b^F \sigma_b$$

Reaktionsrate und Luminosität

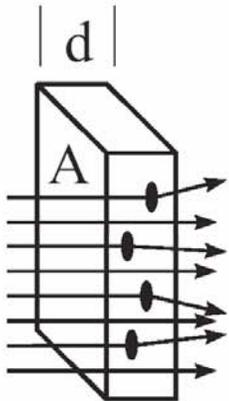
Mit der Flächendichte der Streuzentren, dem Teilchenstrom im Strahl und dem Wirkungsquerschnitt ergibt sich die Zahl der Streuungen (Reaktionen) pro Sekunde:

$$\dot{N} = \sigma \cdot I_a \cdot N_b^F$$

Luminosität:

$$L = I_a \cdot N_b^F = \phi_a \cdot N_b = n_a \cdot v_a \cdot N_b \quad \text{Einheit [cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{]}$$

$$\dot{N} = L \cdot \sigma$$

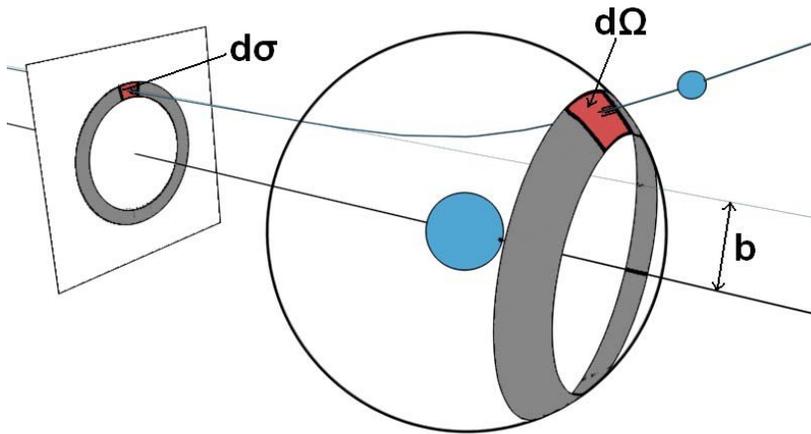


- n_a : Teilchendichte im Strahl
- N_a : Teilchenanzahl im Strahl
- v_a : Strahlgeschwindigkeit
- n_b : Streuzentrensdichte im Target
- N_b : Streuzentrenanzahl im Target
- A : Querschnittsfläche des Targets
- d : Dicke des Targets

- $\dot{N}_a = I_a$: Teilchenstrom im Strahl = Teilchen/Zeit
- $\Phi_a = \dot{N}_a / A$: Teilchenfluß = Teilchen/Zeit · Fläche
- $N_b = n_b A d$
- $N_b^F = N_b / A$: Flächendichte der Streuzentren im Target
- Reaktionsrate im Target :
- $\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b = I_a N_b^F \sigma_b$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/Zeit} \cdot \text{Flächendichte} \cdot \text{Raumwinkel}}$$



Einflappende Teilchen durch Ringfläche

$$d\sigma = 2\pi b |db|$$

auslaufende Teilchen in Raumwinkel

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(-\cos \theta)$$

Ablenkfunktion und differentieller W.Q.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \right|$$

- $d\sigma/d\Omega$ ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen in den Winkelbereich zwischen θ und $\theta + d\theta$ gestreut wird.
- Differentieller W.Q. beschreibt die Winkelverteilung der gestreuten Teilchens.

Rutherford-Streuung

Nebenrechnung

Ablenkfunktion $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \frac{1}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2}$

Diff WQ $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{\sin \theta} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \cot \frac{\theta}{2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}}$$
$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

**Diff. Wirkungsquerschnitt
der Rutherford Streuung**

Rutherford-Streuung

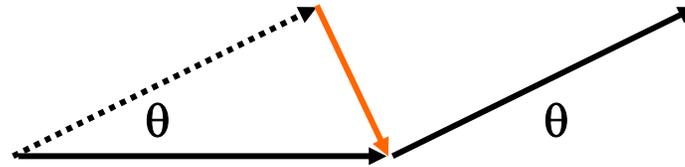
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Mit Impulsübertrag: $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}'$

elastische Streuung: $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$ $\sin \frac{1}{2} \vartheta = \frac{1}{2} \frac{q}{|p|} = \frac{q}{2mv}$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$p^4 = (2mE)^2$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (Z_1 Z_2 2me^2)^2 \frac{1}{q^4}$$

umgekehrt proportional zur vierten Potenz des Impulsübertrages

Dieses Ergebnis erhält man auch bei der quantenmechanischen Berechnung mit Störungstheorie und der Born'schen Näherung.

Rutherford's Reaktion auf das überraschende Ergebnis:

"It was quite the most incredible event that ever happened to me in my life. It was almost as incredible as if you had fired a 15-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you."

Rutherford-Wirkungsquerschnitt

Differentielle Wirkungsquerschnitt für Rutherfordstreuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha}{4E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

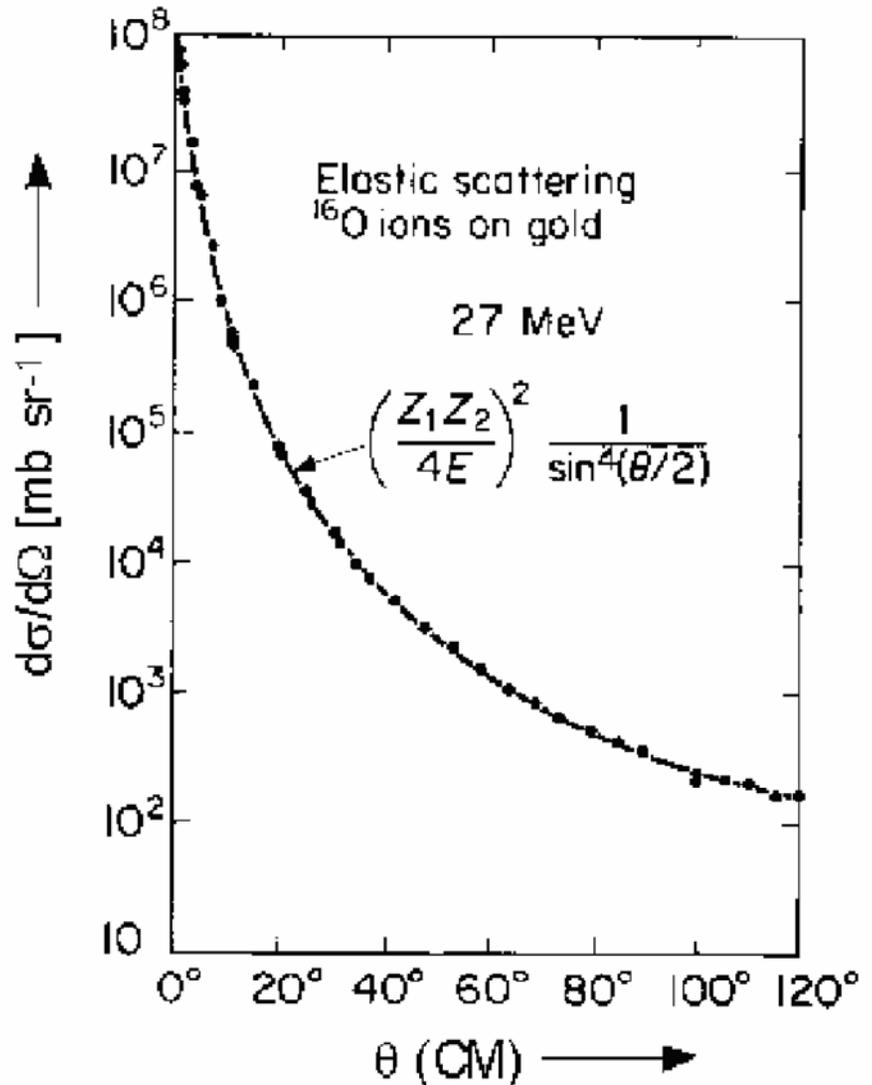
kin. Energie $E = 1/2mv^2$ Feinstrukturkonst. α

- diff. W.Q. - fällt mit $1/\sin^4 \theta/2$ mit Winkel θ ab,
Übereinstimmung mit Beobachtungen von Geiger, Marsden.
 \Rightarrow Atom besteht aus einem harten Kern und Ladung $+Ze$.
- diff. W.Q. - wächst mit Z^2 bei festem Winkel θ
- wird unendlich groß für $\theta \rightarrow 0$
- Bei sehr kleinen Streuwinkeln wird der Stossparameter b größer als Radius der Elektronenhülle. Kernladung ist abgeschirmt und $Ze \rightarrow 0$.
- Bei Streuung an vollständig ionisiertem Kern divergiert der diff. W.Q. trotzdem für $\theta \rightarrow 0$ sodaß der totale W.Q. für Rutherford-Streuung nicht definiert ist.
Eigenschaft der elektromagnetischen Wechselwirkung, die mit der unendlichen Reichweite verbunden ist. Für Wechselwirkungspotentiale, die schneller als $1/r$ abklingen (z.B. die Kernkraft), bleibt er endlich.

Rutherford-Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt nimmt sehr stark mit zunehmendem Streuwinkel ab:

- Um das Projektil stärker zu streuen ist ein höherer Impulsübertrag notwendig. Große Impulsüberträge werden aber nur bei kleinen Abständen ermöglicht, also bei kleineren Stoßparametern.
- ist bei $\theta = 0$ nicht definiert. Dies hat aber keine praktische Bedeutung da das Projektil bei großen Abständen vom Target vom gesamten Atom gestreut.
- ist umgekehrt proportional zur Energie des gestreuten Teilchens. Bei gleichem Streuwinkel muss auf ein Projektil höherer Energie auch ein höherer Impuls übertragen werden.
- ist proportional zum Quadrat der Ladung von Projektil und Target. Das hat mit dem Austausch von Photonen zu tun und ist typisch für elektromagnetische Streuung. Wird später genauer erläutert.



Rutherford-Wirkungsquerschnitt

- Experiment von Geiger, Marsden:

- Helium auf Gold-, bzw. Silberfolie

- Gold: $Z_1=79$, $A=197$ Helium: $Z_2=2$, $A=4$

- kin. Energie $T=4.78$ MeV

- kürzeste Abstand $D = Z_1 Z_2 \alpha / 2T \cdot (1 + 1/\sin\theta/2)$

$$D_{min} = Z_1 Z_2 \alpha / T$$

$$D_{min} = 48\text{fm}$$

=> Obere Grenze (von 48 fm) für den Radius des Au-Kernes

- Chadwick, Bieler (1921)

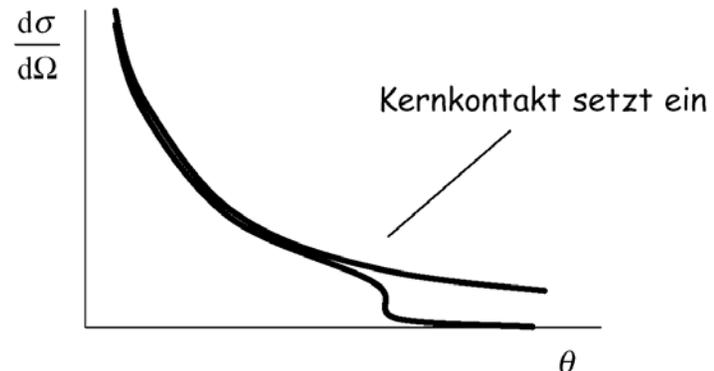
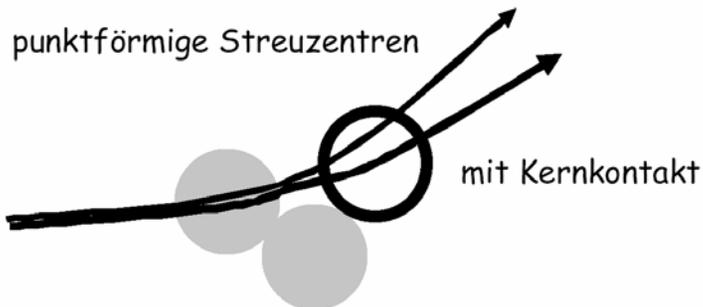
- αp - Streuung an einem Wasserstofftarget $Z_1=1$, $Z_2=2$

=> signifikante Abweichung des diff. W.Q. von der Rutherfordformel

=> endliche Ladungsverteilungen des α und p können Daten nicht beschreiben

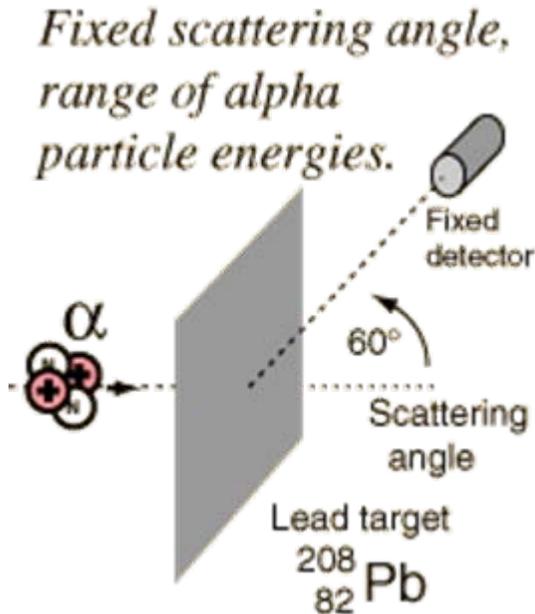
=> starke Wechselwirkung wirkt bei sehr kleinen Abständen ~ 1 fm

=> **Wechselwirkung ändert sich bei sehr kleinen Abständen ~ 1 fm**



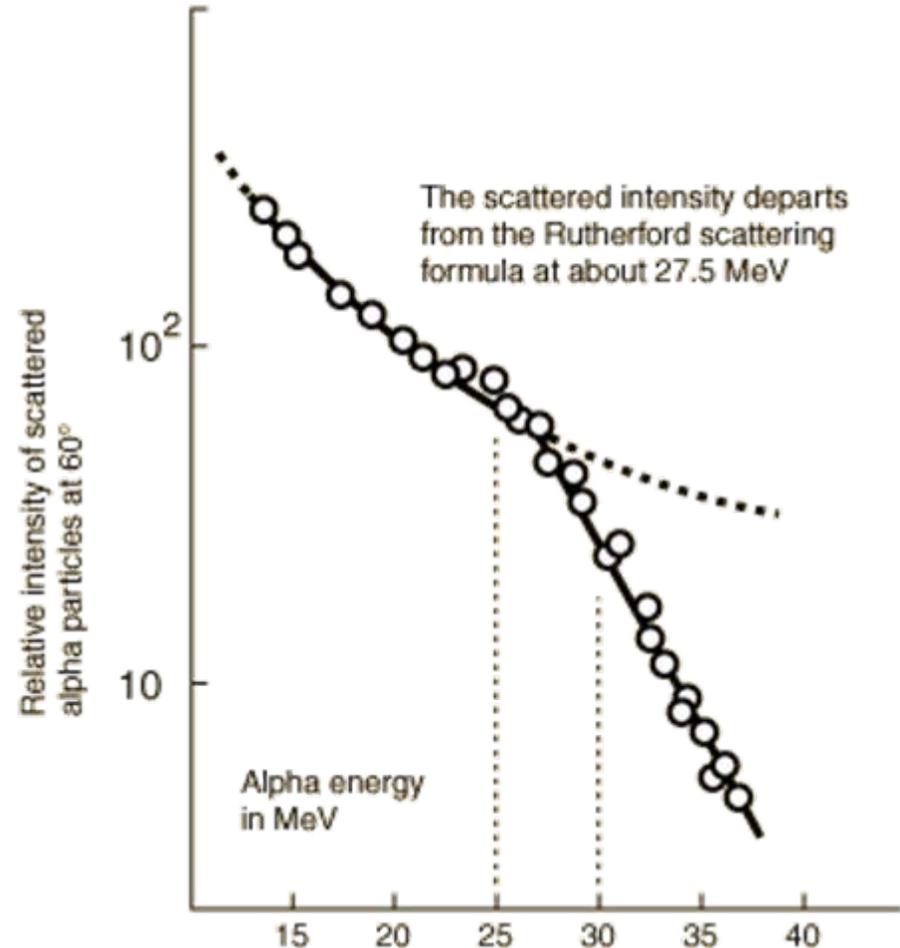
Kern-Kern-Streuung

Streuung von hochenergetischen alpha Teilchen bei einem festen Streuwinkel können für eine Abschätzung des Kernradius verwendet werden.



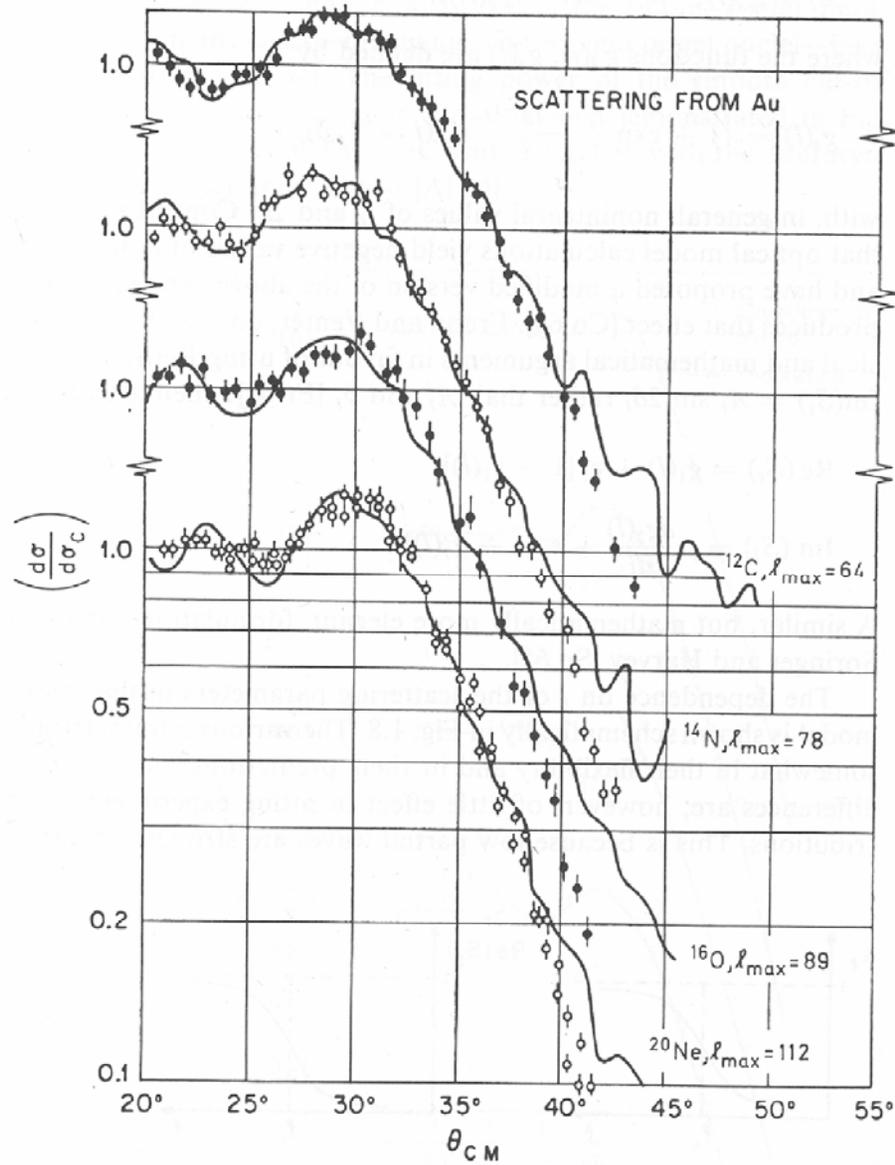
- Aus 180 grad Streuung für 27.5 MeV
- impact parameter: 7.44 fm
 - Kleinster Abstand: 12.9 fm.
 - Kernradius: 7.1 fm

Bessere Methode: Elektronenstreuung



*Eisberg, R. M. and Porter, C. E.,
Rev. Mod. Phys. 33, 190 (1961)*

Kern-Kern-Streuung Ausblick



Zusammenfassung

Wirkungsquerschnitt: Einheit: 1barn (b) = 10^{-28} [m²]

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/Zeit} \cdot \text{Streuzentren/Fläche}} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a \cdot N_b / A} = \frac{\dot{N}}{I_a \cdot N_b^F}$$

Zahl der Streuungen (Reaktionen) pro Sekunde:

$$\dot{N} = \sigma \cdot I_a \cdot N_b^F$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/Zeit} \cdot \text{Flächendichte} \cdot \text{Raumwinkel}}$$

Luminosität:

$$L = I_a \cdot N_b^F = \phi_a \cdot N_b = n_a \cdot v_a \cdot N_b \quad \text{Einheit [cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{]}$$

$$\dot{N} = L \cdot \sigma$$