Kernphysik I

Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- Begriffe der Streutheorie
- Fermis Goldene Regel & Wirkungsquerschnitt

Wiederholung: Rutherford-Streuung

Streuung punktförmiger geladener Kerne

Ablenkfunktion

$$\tan \theta/2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v^2} \frac{1}{b}$$

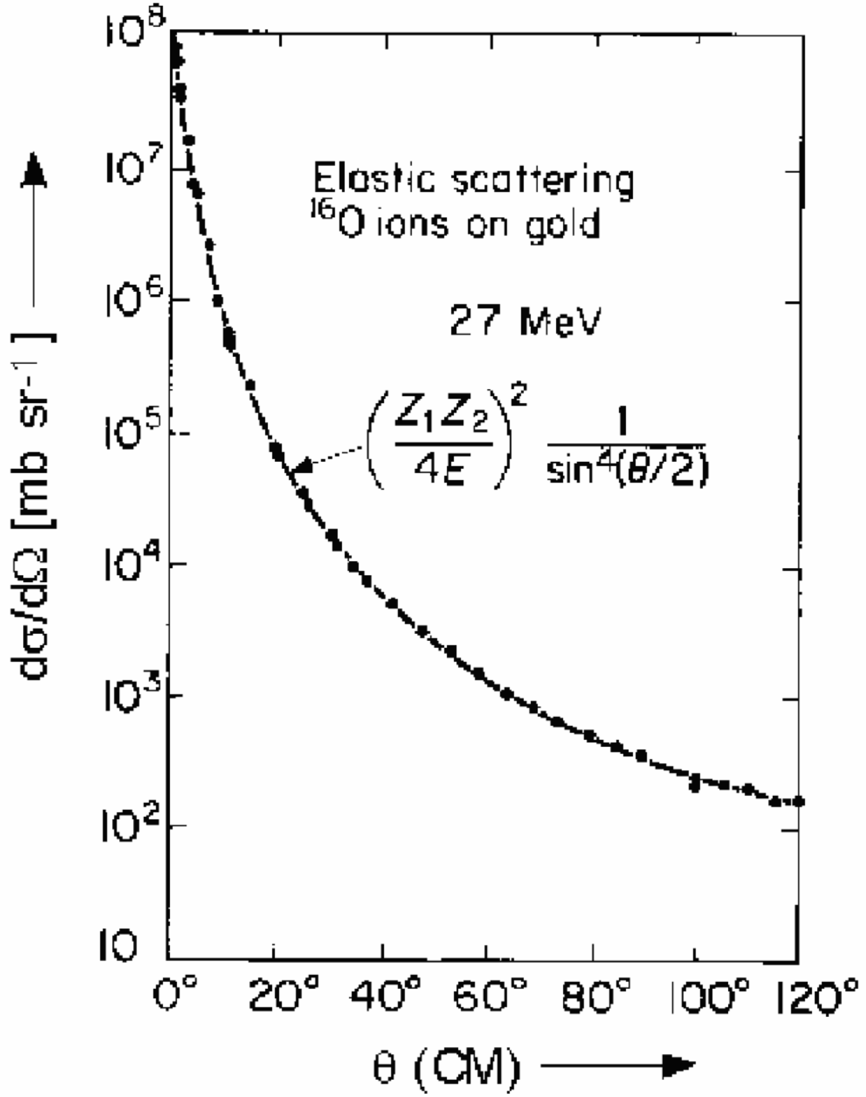
$$\tan \theta/2 = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{m v^2} \frac{1}{b}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

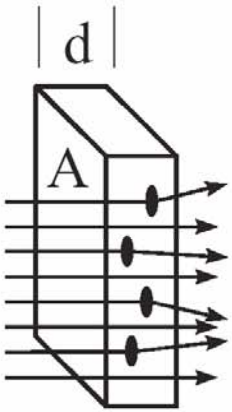
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin\theta} \cdot \frac{db}{d\theta} \right|$$

Rutherford-Streuung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha}{4E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$



Wirkungsquerschnitt



n_a : Teilchendichte im Strahl

N_a : Teilchenanzahl im Strahl

v_a : Strahlgeschwindigkeit

n_b : Streuzentrendichte im Target

N_b : Streuzentrenanzahl im Target

A : Querschnittsfläche des Targets

d : Dicke des Targets

$\dot{N}_a = I_a$: Teilchenstrom im Strahl = Teilchen/Zeit

$\Phi_a = \dot{N}_a / A$: Teilchenfluß = Teilchen/Zeit · Fläche

$N_b = n_b A d$

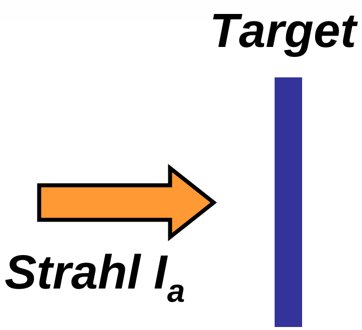
$N_b^F = N_b / A$: Flächendichte der Streuzentren im Target

Reaktionsrate im Target :

$\dot{N} = \Phi_a N_b \sigma_b = I_a N_b^F \sigma_b$

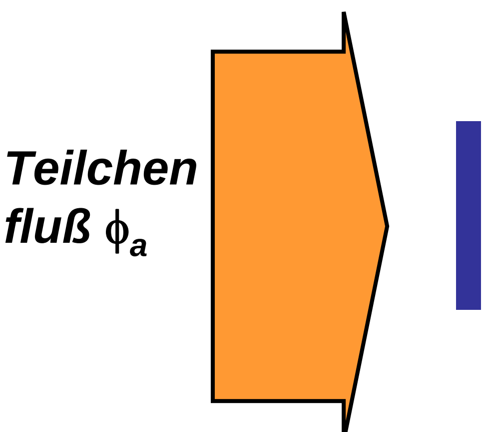
$$\sigma = \frac{\text{Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/Zeit} \bullet \text{Streuzentren/Fläche}} = \frac{\dot{N}}{\dot{N}_a \cdot N_b / A} = \frac{\dot{N}}{I_a \cdot N_b^F}$$

Bsp: Beschleunigerexperiment



$$\sigma = \frac{\text{Reaktionen/Zeit}}{\text{Strahlteilchen/(Zeit} \cdot \text{Fläche)} \bullet \text{Streuzentren}} = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b}$$

Bsp: Reaktorexperiment mit Neutrinos



Totaler, elastischer, inelastischer WQ

Bemerkung zu Streuprozessen:

Elastische Streuung:

A + B -> A + B

nur die Impulse der Reaktionspartner ändern sich

Damit ist der Wirkungsquerschnitt σ_{el} *für elastische Reaktionen verknüpft.*

Inelastische Streuung:

A + B -> A + B (oder A + B -> A + B* oder A + B -> A* + B*)*

A + B -> C + D + ...

Die Endzustände sind nicht mehr die Eingangszustände. Die inelastischen Reaktionen teilen sich oft auf mehrere Reaktionskanäle auf.

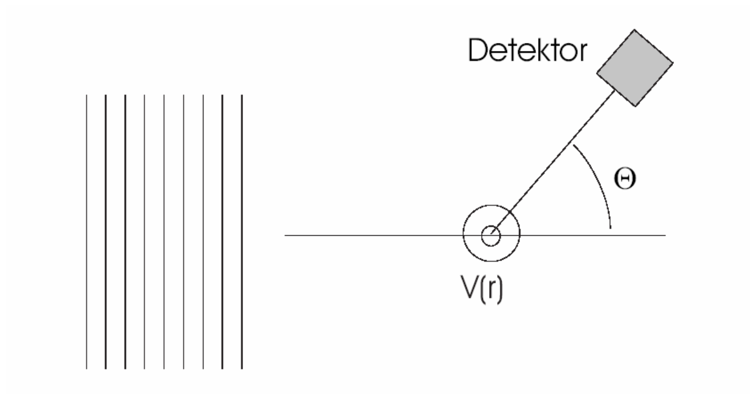
Damit ist der Wirkungsquerschnitt σ_{inel} *für inelastische Reaktionen verknüpft.*

Totale Wirkungsquerschnitt

$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel}$

Summe von elastischem und inelastischem Wirkungsquerschnitt

Streutheorie - Kurze Einführung



Einlaufende ebene Welle $\vec{k} = (0,0,k)$

$$\Psi_{in}(\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}\vec{r}} = Ae^{ikz}$$

Auslaufende Kugelwelle

$$\Psi_{str}(\vec{r}) = A\, f(\theta,\varphi)\, \frac{e^{ikr}}{r} \quad , r \to \infty$$

Gesamtwellenfunktion

$$\Psi_{str}(\vec{r}) = A\left(e^{ikz} + f(\theta,\varphi)\, \frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

A - *Amplitude*
f(θ,φ) - *Streuamplitude*

Stromdichte der Welle

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2\mu i}\{\Psi^*\nabla\Psi - (\nabla\Psi)^*\Psi\} = j_{in}\vec{e}_z$$

$$j_{in} = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\hbar k}{\mu}|A|^2$$

$$j_{str} = \frac{\hbar k}{\mu}|A|^2 \frac{|f(\theta,\varphi)|^2}{r^2} = v\,|A|^2 \frac{|f(\theta,\varphi)|^2}{r^2}$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{j_{str} r^2 d\Omega}{j_{in}} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\varphi)|^2$$

μ - *Masse*
v - *Geschwindigkeit*

Streutheorie - Kurze Einführung

Berechnung des Wirkungsquerschnittes durch

Lösung der stationären Schrödinger - Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+V(\vec{r})\right)\Psi(\vec{r})=E\Psi(\vec{r})$$

mit der asymptotischen Randbedingung : Auslaufende Kugelwelle

$$\Psi_{str}(\vec{r})=A\left(e^{ikz}+f(\theta,\varphi)\ \frac{e^{ikr}}{r}\right)\ ,\ r\rightarrow\infty$$

Bei einem radial symmetrischen Potential, das nur vom Abstand *r* abhängt, besitzt die Lösung azimutale Symmetrie bezüglich der *z*-Achse, d.h. die Streuamplitude hängt nicht vom Azimutwinkel ab.

Berechnung des Wirkungsquerschnittes durch

$$d\sigma=\frac{\text{Zahl der pro Zeit in den Raumwinkel d}\Omega\text{ gestreuten Teilchen}}{\text{einfallende Stromdichte}}$$

$$=\frac{j_{str}\ r^2 d\Omega}{j_{in}}=\left|f(\theta,\varphi)\right|^2 d\Omega$$

differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left|f(\theta,\varphi)\right|^2$$

Lösung der stationären Schrödingergl.
-> Wellenfunktion
-> Amplitude & Streuamplitude
-> differentieller Wirkungsquerschnitt

Störungstheorie: Fermis Goldene Regel

Theoretische Bestimmung der Reaktionsrate

Reaktionsrate hängt von Art und Stärke des Wechselwirkungspotentials ab.
Hamiltonoperator H_{int} verknüpft bei einer Reaktion die Wellenfunktion Ψ_i des Anfangszustandes mit Ψ_f des Endzustandes.

Übergangsmatrixelement, Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$M_{fi} = \left\langle \Psi_f \left| H_{\text{int}} \right| \Psi_i \right\rangle = \int \Psi_f^* H_{\text{int}} \Psi_i dV$$

Reaktionsrate hängt von Anzahl der möglichen Endzustände ab.
Phasenraumvolumen eines Teilchens: $h^3=(2\pi\hbar)^3$
Streuung in Volumen V und Impulsbereich zwischen p' und $p'+dp'$
Volumen im Impulsraum ist Kugelschale: $4\pi p'^2 dp'$
Zahl der möglichen Endzustände:

$$dn(p') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'$$

Energie und Impuls sind verknüpft: $dE' = v' dp'$

Dichte der Endzustände im Energieintervall dE‘

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v'(2\pi\hbar)^3}$$

Störungstheorie: Fermis Goldene Regel

Beziehung zwischen ***Reaktionsrate*** dem ***Übergangsmatrixelement*** und der ***Dichte der Endzustände*** ist durch ***Fermis Goldene Regel*** festgelegt:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| M_{fi} \right|^2 \cdot \rho(E')$$

Experimentell ist die Reaktionsrate W die Anzahl der Reaktionen pro Zeit pro Targetteilchen und pro Zahl der einfallenden Teilchen.
W ist mit dem Wirkungsquerschnitt verbunden:

$$W = \frac{\dot{N}}{N_a N_b} = \frac{\Phi_a N_b \sigma_b}{N_a N_b} = \frac{n_a}{N_a} v_a \sigma_b = \frac{v_a \sigma_b}{V}$$

$$V = \frac{N_a}{n_a} \; : \quad \text{Volumen der Strahlteilchen}$$

Für den Wirkungsquerschnitt gilt deshalb:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar \cdot v_a} \left| M_{fi} \right|^2 \cdot \rho(E') \cdot V$$

Störungstheorie: Fermis Goldene Regel

Fermis Goldene Regel

Reaktionsrate:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| M_{fi} \right|^2 \rho(E')$$

Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \left| M_{fi} \right|^2 \rho(E') V$$

Mit $W = \frac{\dot{N}(E')}{N_b \cdot N_a} = \frac{\sigma \cdot v_a}{V}$ V ist das Raumvolumen in dem sich die Strahlteilchen befinden.

Zur Erinnerung bei Zerfällen von instabilen Kernen (β-Zerfall), instabilen Teilchen, Anregungen von Teilchenresonanzen, Übergängen zwischen angeregten nuklearen Energiezuständen gilt:

$W = \frac{1}{\tau}$ τ Lebensdauer, Energiebreite des Zustandes $\Delta E = \frac{\hbar}{\tau}$