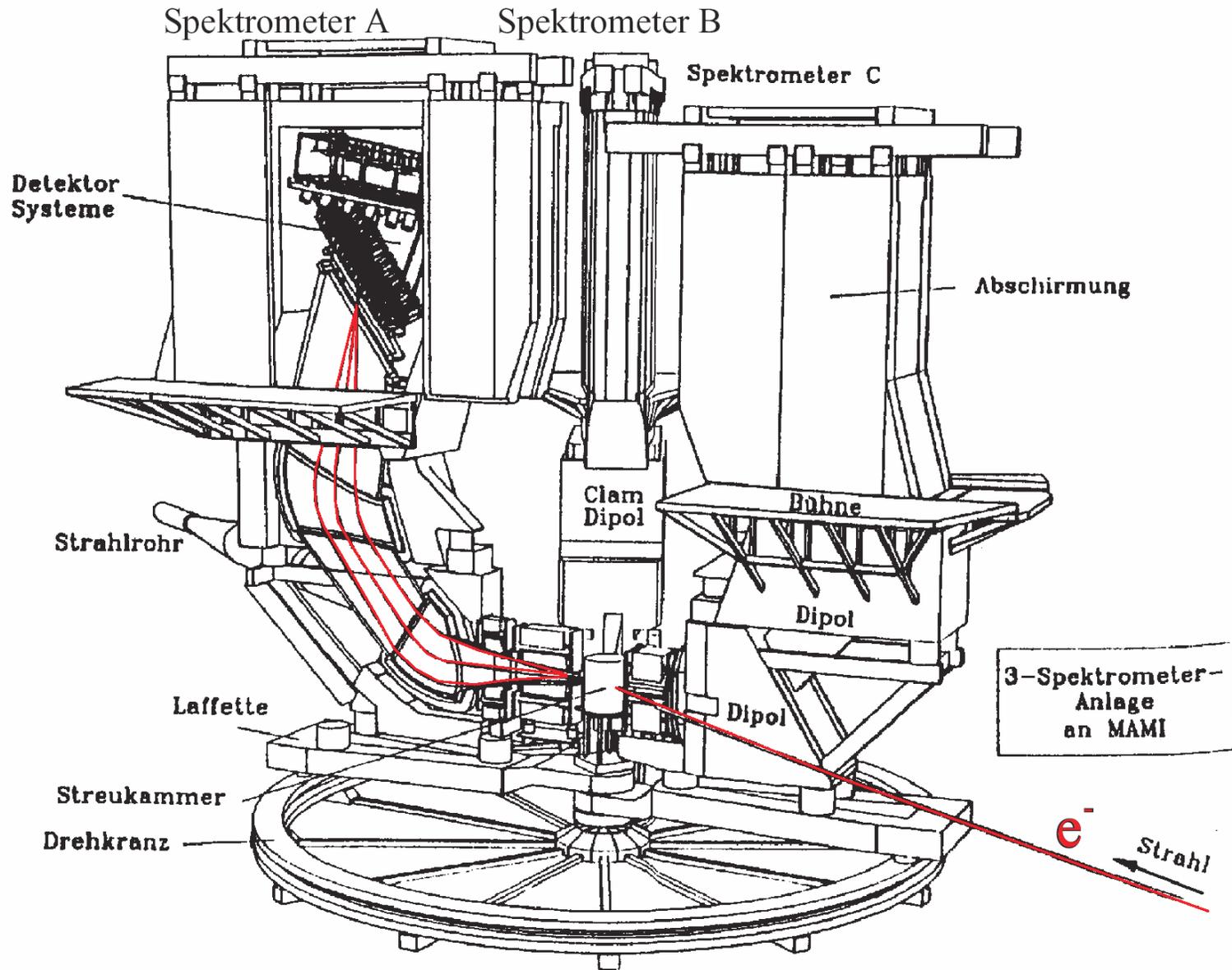


- Bemerkung: Relativistische Elektronstreuung

Grundlegende Eigenschaften der Atomkerne:

- Elektrisches Quadrupolmoment
- Magnetisches Dipolmoment

# Wiederholung: MAMI Spektrometer

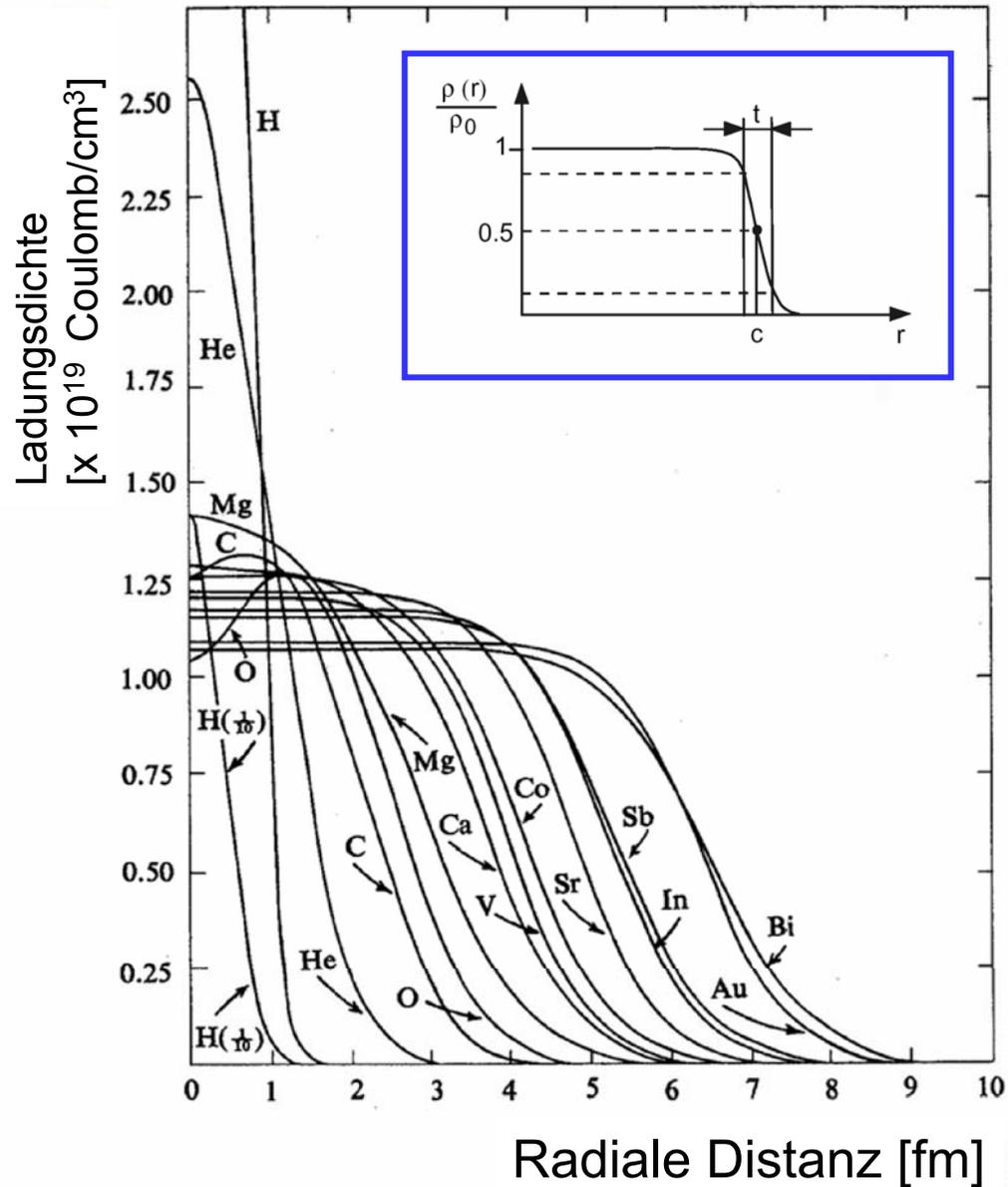


# Zusammenfassung: Ladungsdichte

**Ladungsdichte**    **Formfaktor**  
**Fourier-Trans.**    **Experiment**

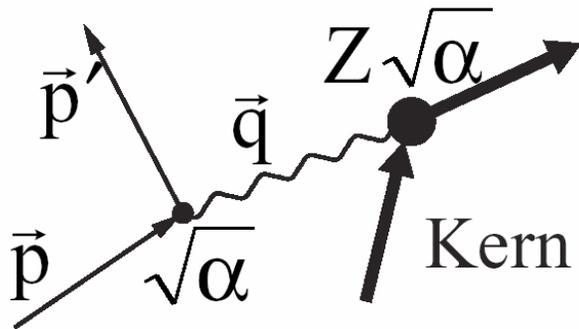
$\rho(r)$	$ F(q^2) $	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	${}^6\text{Li}$
homogene Kugel	oszillierend	—
Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	${}^{40}\text{Ca}$

$r \longrightarrow$                        $|q| \longrightarrow$



# Elektronstreuung am Kern

## Feynman-Diagramm



Virtuelles Photon überträgt Impuls  $\vec{q}$

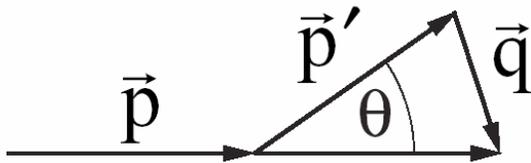
$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad \text{für } |\vec{p}| = |\vec{p}'|$$

$$|\vec{q}| = 2 |\vec{p}| \sin \theta / 2$$

Die Wellenlänge des virtuellen Photons

$$\lambda = \hbar / |\vec{q}| = \hbar / 2 |\vec{p}| \sin \theta / 2$$

bestimmt die räumliche Auflösung



# Relativistische Kinematik der Elektronstreuung

Vierervektoren von Ort und Impuls

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x}) \quad p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, \vec{p})$$

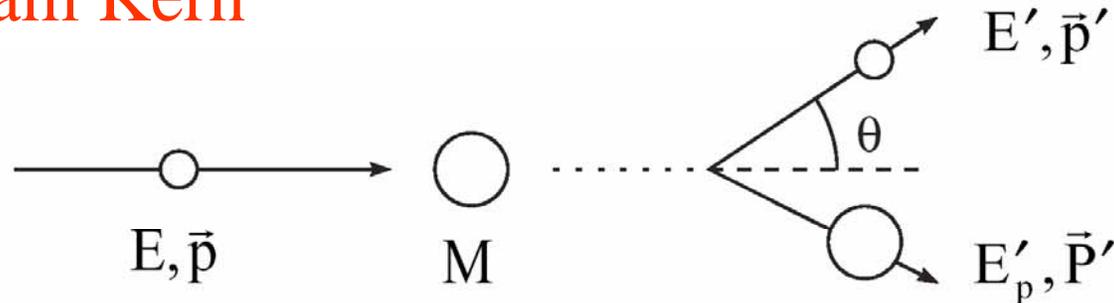
Skalarprodukt:  $ab = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$

$$p^2 = (E/c)^2 - \vec{p}^2$$

Invariante Masse: für  $\vec{p} = 0$  und  $E = m_0 c^2$

$$p^2 = m_0^2 c^2; \quad m_0 = \sqrt{p^2} / c \quad \text{daraus :} \quad E^2 - \vec{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

## Kinematik der elastischen Elektronstreuung am Kern



$$p = (E / c, \vec{p}) \quad P = (Mc, 0)$$

$$p' = (E' / c, \vec{p}') \quad P' = (E'_p / c, \vec{P}')$$

# Viererimpuls und Rückstoß

## Viererimpulserhaltung

$$\boxed{p + P = p' + P'} \quad \text{oder} \quad p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2$$

Beim elastischen Stoß bleiben die invarianten Massen  $m_e$  und  $M$  erhalten

$$p^2 = p'^2 = (m_e c)^2 \quad P^2 = P'^2 = (Mc)^2$$

Daher gilt

$$\underline{pP = p'P'} = p'(p + P - p') = p'p + p'P - (m_e c)^2$$

## Rückstoßenergie

$$E \cdot Mc^2 = E'E - \vec{p}\vec{p}'c^2 + E' \cdot Mc^2 - m_e^2 c^4 \quad (\text{im Laborsystem})$$

Für  $E \gg m_e c^2$  gilt  $E \approx |\vec{p}|c$

$$E \cdot Mc^2 = E'E \cdot (1 - \cos\theta) + E' \cdot Mc^2$$

$$\boxed{E' = \frac{E}{1 + E/Mc^2(1 - \cos\theta)}}$$

Rückstoßenergie  $(E - E')$  wächst mit  $E/Mc^2$

# Elastische Elektron-Nukleon-Streuung

Größe des Nukleons bestimmt die Energie des Elektronenstrahls

Experimentell: einige hundert MeV bis zu einigen GeV

Masse des Nukleons: ca. 938MeV

=> Rückstoß des Targets kann nicht mehr unberücksichtigt bleiben

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* \cdot \frac{E'}{E}$$

=> Benutzung des Viererimpulsübertrags:

$$q^2 = (p - p')^2 \approx \frac{-4EE'}{c^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Um nur mit positiven Größen zu arbeiten, definiert man:  $Q^2 = -q^2$

# Erinnerung: Spin und Parität

Der Kern ist ein abgeschlossenes System und hat somit einen definierten Kernspin mit der Quantenzahl  $J$  für den Kernspin.

$$|J| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$$

$$m_J = -J, -(J-1), \dots, J-1, J$$

Kernspin ist die Summe der Gesamtdrehimpulse der individuellen Nukleonen:  $j$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i \quad (\text{jj-Kopplung})$$

Der Gesamtdrehimpuls eines Nukleons ist die Summe des intrinsischen Spins und des Bahndrehimpulses:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

- intrinsischer Spin des Protons oder Neutrons:  $s = 1/2\hbar$

- der Bahndrehimpuls eines Nukleons ist immer geradzahlig

Daraus folgt: gerade Massenzahl  $A$ :  $J =$  ganzzahlig

ungerade Massenzahl  $A$ :  $J =$  halbzahlig

Alle Kerne mit geradem  $Z$  und geradem  $N$  haben  $J = 0$

# Erinnerung: Spin und Parität

In einem symmetrischen Potential  $V(r)=V(-r)$  haben die Wellenfunktionen eine **definierte Parität**.

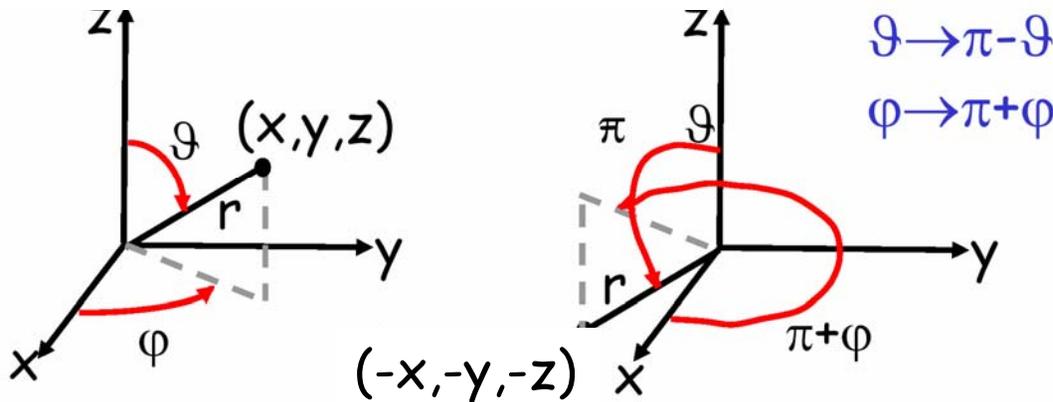
$$\Psi(\vec{r}) = +\Psi(-\vec{r})$$

positive Parität

$$\Psi(\vec{r}) = -\Psi(-\vec{r})$$

negative Parität

Sphärische Polarkoordinaten



$$\Psi_{nlm_l}(r, \pi - \vartheta, \pi + \varphi) = (-1)^l \Psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$$

$$[\Psi(\vec{r})]^2 = [\Psi(-\vec{r})]^2$$

Gilt für alle Kernwellenfunktionen

Nomenklatur für Kernzustände:  
Spin und Parität

$0^+$  (Spin:0 Parität: gerade)

$5/2^-$  (Spin:5/2 Parität: ungerade)

# Elektromagnetische Momente

Statische elektromagnetische Eigenschaften der Kerne werden durch ihre **elektromagnetischen Momente** charakterisiert. Diese enthalten die Information über die Verteilung der Ladung und der magnetischen Momente im Kern.

Die zwei wichtigsten Momente sind:

**Elektrisches Quadrupolmoment  $Q$**

**Magnetisches Dipolmoment  $\mu$**

## Elektrische Momente

Sie sind von der Ladungsverteilung im Inneren des Kernes abhängig und sind ein Maß für die Kernform d.h. den Konturen konstanter Ladungsdichte.

Die Kernform wird durch eine Multipolentwicklung des äusseren elektrischen Feldes parametrisiert.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = Ze$$

# Elektrische - Momente

Reihenentwicklung des Potentials für große Abstände  $r$  ( $r'/r < 1$ ):

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2r'r \cos\vartheta]^{1/2}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = r^{-1} \left[ 1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos\vartheta \right]^{-1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} = r^{-1} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos\vartheta \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos\vartheta \right)^2 + \dots \right]^{-1/2}$$

$$\approx r^{-1} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos\vartheta + \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots \right]^{-1/2}$$

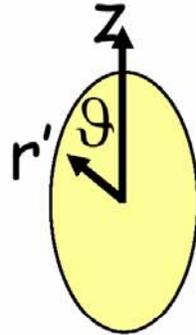
$$r' \ll r$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ Ze + \frac{1}{r} \int r' \cos\vartheta \rho(r') d^3 r' + \frac{1}{2r^2} \int r'^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) \rho(r') d^3 r' + \dots \right]$$

# Elektrische - Momente

QM Beschreibung:

$$\rho(\vec{r}') = |\psi(\vec{r}')|^2$$



Definition der z-Achse:

$$z = r' \cos \vartheta$$

$$E0 \text{ moment} = \int \psi^* \psi \, d\vec{r}' = Ze$$

Ladung

$$E1 \text{ moment} = \int \psi^* z \psi \, d\vec{r}'$$

Elektrischer  
Dipol

$$E2 \text{ moment} = \frac{1}{e} \int \psi^* (3z^2 - r'^2) \psi \, d\vec{r}'$$

Elektrischer  
Quadrupol

Wellenfunktionen des Kernes haben definierte Parität.

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = |\psi(-\mathbf{r})|^2$$

Das elektrische Dipolmoment des Kernes ist null.

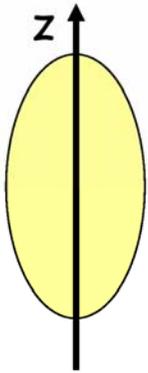
# Quadrupolmoment

$$Q = \frac{1}{e} \int \Psi^* (3z^2 - r^2) \Psi d^3\vec{r}$$

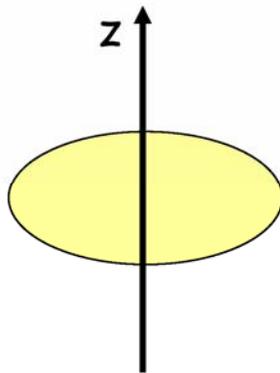
$$Q = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$\propto \frac{1}{e} \int r^2 (3\cos^2 \theta - 1) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

$$\propto \frac{1}{e} \int r^2 Y_2^0(\theta, \phi) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$$



**prolat**

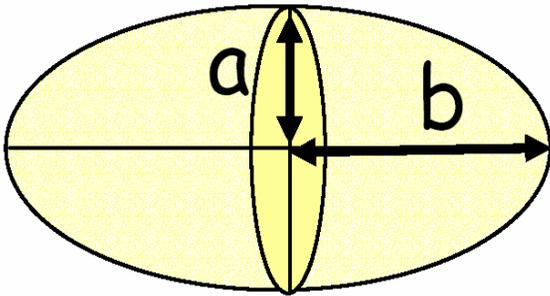


**oblat**

## **Q: Quadrupolmoment des Kernes**

- Dimension des Quadrupolmomentes ist Fläche. Einheit barn (b)
- Für kugelsymmetrische Kerne verschwindet das Quadrupolmoment Q.
- Prolater (zigarrenförmiger) Kern:  $Q > 0$   
Oblater (linsenförmiger) Kern:  $Q < 0$
- In inhomogenen elektrischen Feld verschieben sich die Energieniveaus eines deformierten Kernes.
- Das Integral verschwindet für  $J = 0$  oder  $J = 1/2$  (Eigenschaft von Kugelfunktionen, Wigner Eckart Theorem) Kernzustände mit Spin 0 oder 1/2 haben kein elektrisches Quadrupolmoment.

# Quadrupolmomente



Einfaches Modell für die Beschreibung einer Kernform:

Homogen geladenes Rotationsellipsoid (um die z-Achse) der Ladung  $Ze$  mit den Halbachsen  $b$  in z-Richtung und  $a$  senkrecht dazu.

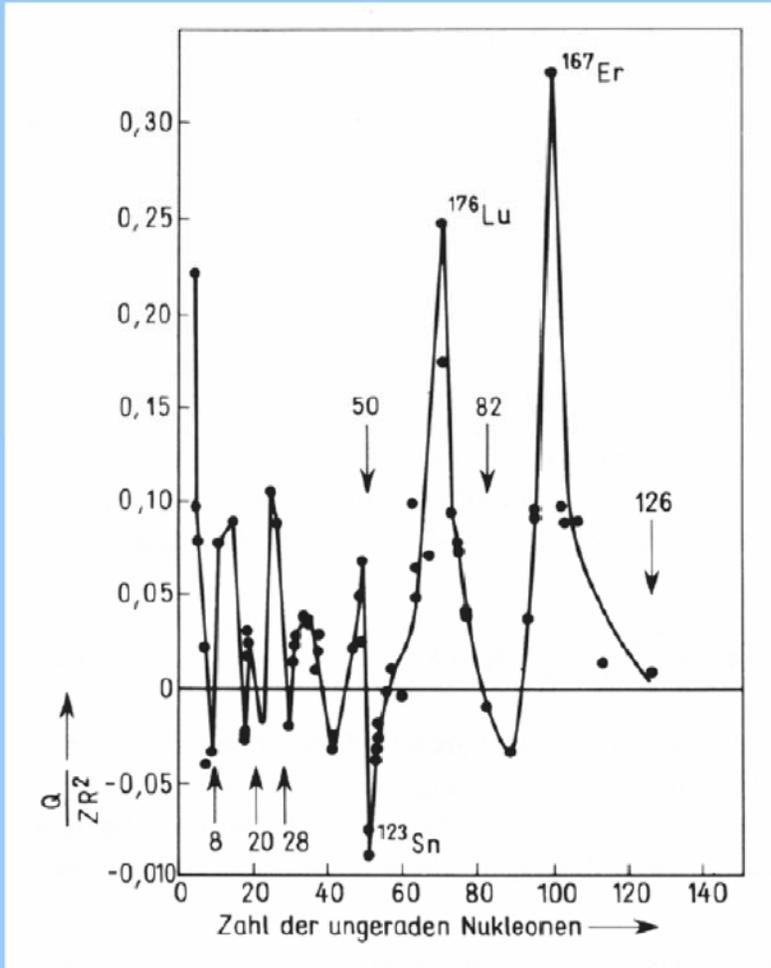
Das klassische Quadrupolmoment ergibt sich zu:

$$Q = \frac{2}{5} Z(b^2 - a^2) = \frac{4}{5} Z\bar{R}^2 \left( \frac{\Delta R}{\bar{R}} \right) \equiv \frac{4}{5} Z\bar{R}^2 \cdot \delta$$

Die Abweichung  $\Delta R = (b-a)$  von der Kugelgestalt mit mittlerem Radius  $\bar{R} = (a+b)/2$  wird üblicherweise durch den **Deformationsparameter**  $\delta$  beschrieben.

# Quadrupolmomente

## Quadrupolmomente



$$Q \equiv \frac{4}{5} Z \bar{R}^2 \cdot \delta$$

**Deformationsparameter ist proportional zu:**

$$\delta \propto \frac{Q}{Z \bar{R}^2}$$

# Elektromagnetische Momente

## **Intrinsisches und spektroskopisches Quadrupolmoment**

Unterschied zwischen dem Quadrupolmoment  $Q_{lab}$  im Laborsystem (dem *spektroskopischen Quadrupolmoment*) und dem intrinsischen Quadrupolmoment  $Q_{intr}$ .

$Q_{lab}$  bezieht sich auf die z-Achse (Quantisierungsachse) im Laborsystem,  
 $Q_{intr}$  bezieht sich auf die 3-Achse im intrinsischen System

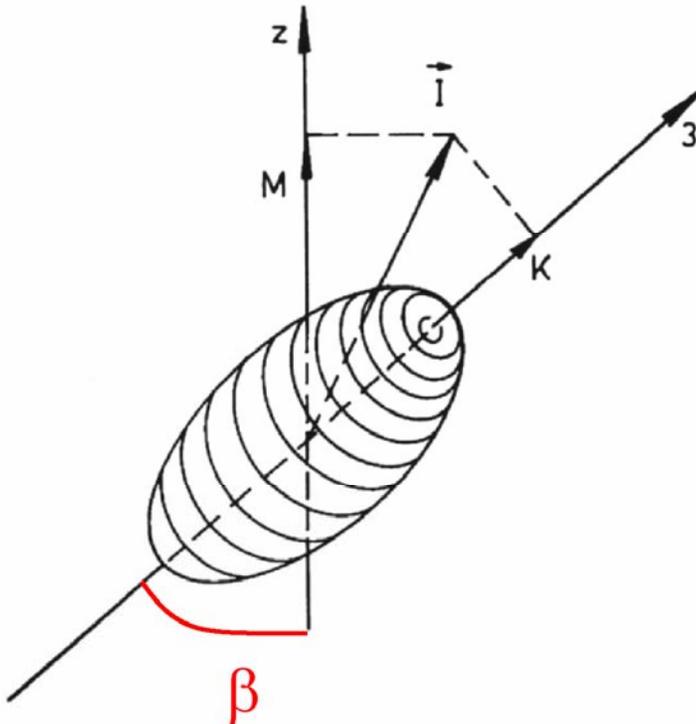
Beide Achsen können um Winkel  $\beta$  verdreht sein.

Beziehung zwischen Labor- und intrinsischem System:

$$Q_{lab} = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) Q_{intr}$$

Quantenmechanische Beziehung

$$Q_{lab} = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} \cdot Q_{intr}$$



# Magnetisches Moment

- 1) Kreisstrom erzeugt magnetisches Dipolmoment

Leiterschleife:

Strom  $I$



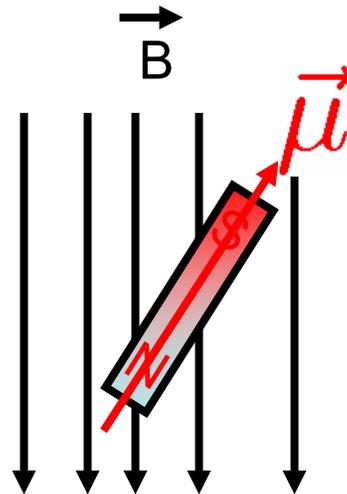
Magnetisches  
Dipolmoment

$$\mu = IA$$

senkrecht auf  $A$

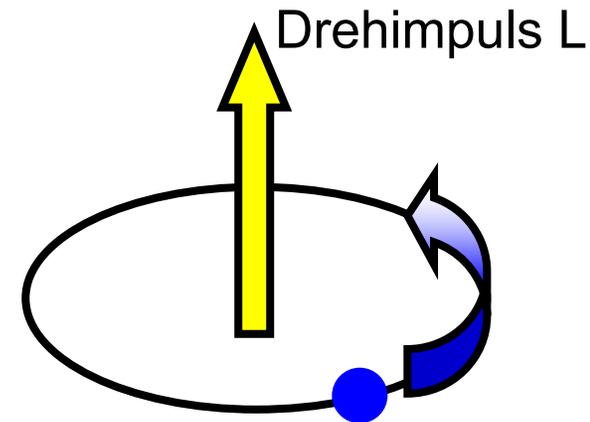
$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] d^3r'$$

- 2) Magnetischer Dipol in Magnetfeld hat potentielle Energie

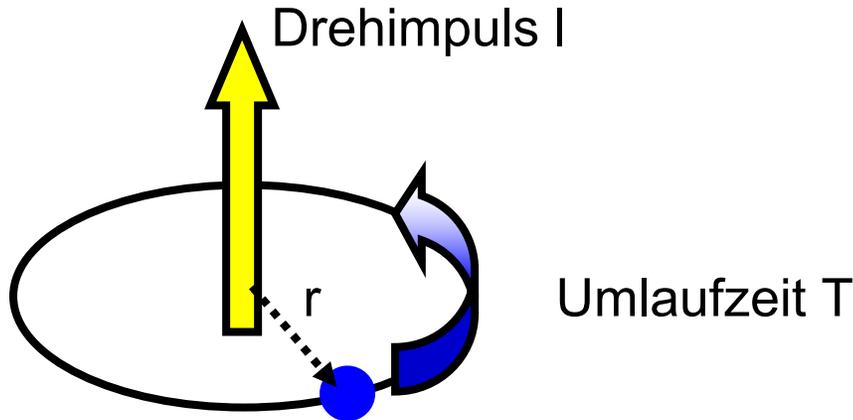


$$V_{mag} = -\vec{\mu} \vec{B}$$

- 3) Kreisendes Teilchen erzeugt Magnetfeld



# Magnetisches Moment des Elektrons



$$\text{Strom } I = \frac{q}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$$

$$\mu = \frac{IA}{\pi r^2} = \frac{1}{2}e\omega r^2$$

$$\text{mit } l = mvr = m\omega r^2$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{l}$$

$$\mu_B = \frac{e}{2m_e} \hbar$$

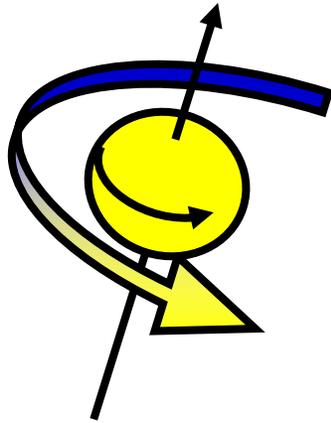
- Bohrsches Magneton:  
magnetisches Moment eines Elektrons mit Bahndrehimpuls  $l = \hbar$

- QM Operator des magnetischen Dipolmoments:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \int \Psi^*(r') \cdot \vec{L} \cdot \Psi(r') d^3 r'$$

# Magnetisches Moment des Elektrons

Magnetisches Moment des Elektrons



$$S = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

$$\vec{\mu} = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{s}$$

für einen Kreisstrom wäre  $g=1$

$g$ :  $g$ -Faktor des Elektrons  
 $g_s=2,0023$

Spin  $\frac{1}{2}$  Teilchen: Dirac Theorie (relativistische QM)  $g=2$   
Abweichungen ( $g-2$ ) wird erklärt durch QED:  
Wechselwirkung mit Strahlungsfeld

# Magnetisches Moment des Kernes

Magnetisches Moment eines Kernes

$$\vec{\mu}_I = \text{const} \cdot \vec{I} = g_k \mu_k \frac{\vec{I}}{\hbar}$$

Einheit des magnetischen Momentes : Kernmagneton

$$\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_p} = 3.152 \cdot 10^{-14} \quad [\text{MeV/T}]$$

Analog zum Bohrschen Magneton

Kernmagneton ist um Verhältnis  $\frac{m_e}{m_p} \sim 1/1836$  kleiner.

Für Kern g - Faktor könnte man 2 für das Proton (wie Elektron) erwarten, und null für das Neutron. Aber Experiment zeigt :

$$g_s = 5,5858 \quad g_l = 1 \quad \text{für das Proton}$$

$$g_s = -3,8261 \quad g_l = 0 \quad \text{für das Neutron}$$

# Magnetisches Moment des Kernes

Operatoren für die magnetischen Momente :

$$\hat{\mu}_s = g_s \frac{e\hbar}{2m_N} \frac{\hat{s}}{\hbar} \qquad \hat{\mu}_l = g_l \frac{e\hbar}{2m_N} \frac{\hat{l}}{\hbar}$$

Das totale magnetische Moment eines Nukleons mit totalem Drehimpuls  $\hat{j}$  setzt sich aus den magnetischen Momenten des Spins und des Bahndrehimpulses zusammen :

$$\hat{\mu}_j = \mu_K \frac{1}{\hbar} (g_s \hat{s} + g_l \hat{l})$$

Um das magnetische Moment  $\mu$  zu bestimmen, muss man  $\hat{\mu}_j$  auf den totalen Drehimpuls  $\hat{j}$  projizieren. Quantenmechanisch korrekt ist das magnetische Moment  $\hat{\mu}$  über den Erwartungswert der z - Komponente des Operators  $\hat{\mu}_j$  definiert :

$$\hat{\mu} = g_j \mu_K \hat{j} = \frac{\hat{\mu}_j \cdot \hat{j}}{|\hat{j}|} \cdot \frac{\hat{j}}{|\hat{j}|}$$

- zeigt in Richtung von j
- Betrag ist gleich Projektion von  $\mu_j$  auf j

# g-Faktoren des Kernes

Für den g - Faktor  $g_j$  gilt :

$$g_j = \frac{g_l(\hat{l} \cdot \hat{j}) + g_s(\hat{s} \cdot \hat{j})}{|j|^2}$$

mit  $j(j+1) = \hat{j}^2 = \hat{l}^2 + 2\hat{l} \cdot \hat{s} + \hat{s}^2$

$$\hat{l}^2 = l(l+1) \quad \hat{s}^2 = (j-\hat{l})^2 \text{ bzw. } \hat{l}^2 = (j-\hat{s})$$

$$\hat{s}^2 = s(s+1) = 3/4$$

$$g_j = \frac{g_l \{j(j+1) + l(l+1) - 3/4\} + g_s \{j(j+1) - l(l+1) - 3/4\}}{2j(j+1)}$$

$$g_j = g_l \pm \frac{(g_s - g_l)}{2l+1} \quad \text{für } j = l \pm 1/2$$

Einfache Beziehung für den g-Faktor von Einteilchenzuständen.

Weitere Details im Zusammenhang mit Zuständen im Schalenmodell.